



CURSO 2002/2003.	SEPTIEMBRE. Reserva.
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Explique conceptualmente cual es la utilidad del Teorema Central del Limite.

Respuesta.-

Permite calcular probabilidades de una variable aleatoria S_n , suma de un número elevado de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, ya que el teorema establece que dicha suma se comporta aproximadamente como una variable Normal cuyas media y varianza son la suma, respectivamente, de las medias y varianzas de las variables aleatorias cuya suma es S_n .

2. Explique la diferencia entre parámetro y estadístico.

Respuesta.-

Un parámetro es cualquier medida de posición o dispersión, o cualquier momento de una variable aleatoria de una población (por ejemplo, la media, la varianza, etc..). Es constante.

Un estadístico es una función de las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n , que forman una muestra. Por ejemplo, la media muestral $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, o la varianza muestral, etc. Es una variable aleatoria.

3. ¿Qué relación existe entre la varianza muestral y la distribución χ^2 de Pearson?

Respuesta.-

Si S^2 es la varianza muestral (tamaño n), en una población con varianza poblacional σ^2 , entonces el estadístico $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ sigue una distribución χ^2 con $n - 1$ grados de libertad (teorema de Fisher).

4. Explicar conceptualmente qué mide la potencia de un contraste.

Respuesta.-

Es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_0 . Si H_0 es cierta, entonces Potencia = $P[\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta}] = \alpha$ (probabilidad del error de tipo I); si H_0 es falsa \rightarrow Potencia = $P[\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ falsa}] = 1 - P[\text{aceptar } H_0 / H_0 \text{ falsa}] = 1 - \beta$ (donde β = probabilidad del error de tipo II)

PROBLEMAS

1.- Las ventas medias de una ferretería son de 6000 € a la semana con una desviación típica de 100 €. Se pide calcular con estos datos: a) La probabilidad de que las ventas medias semanales sean mayores de 6250 € b) Definir el menor intervalo de tal forma que contenga al menos el 95% de las ventas medias semanales.

Solución.-

a) Como no conocemos la distribución de las ventas semanales, la desigualdad de Chebychev nos proporcionará una cota de la probabilidad pedida.

Sea X la variable aleatoria “ventas medias semanales”. Se tendrá:

$$P[X > 6250] = P[X - 6000 > 250] \leq P[|X - 6000| > 250] \leq (\text{teorema de Chebychev}) \leq \frac{10000}{62500} = 0,16.$$

Es decir, la probabilidad pedida no supera a 0,16.



b) La desigualdad de Chebychev $P[|X - \mu| < K] > 1 - \frac{\sigma^2}{K^2}$ podemos escribirla equivalentemente $P[\mu - K < X < \mu + K] > 1 - \frac{\sigma^2}{K^2}$. Haciendo $1 - \frac{10000}{K^2} = 0,95$ se obtiene $K \cong 447,21$. Luego $[5552,79; 6447,21]$ es el menor intervalo que contiene al menos el 95% de las ventas medias semanales

2.- El gasto medio por hogar, en España, en Artículos de vestir y calzado para el año 2000 se distribuye según una Normal con desviación típica de 2108,51 €. De una muestra aleatoria de 100 familias se obtuvo un gasto medio de 1.484,87 €. **a)** Determinar los intervalos de confianza del 90% y del 95% para el gasto medio por hogar en Artículos de vestir y calzado. **b)** Calcular el tamaño de la muestra necesario para obtener un intervalo de confianza del 90%, para el gasto medio por hogar en Artículos de vestir y calzado, con una amplitud de 500 €

Solución.-

a) De las tablas se obtiene que $P[-1,65 \leq Z \leq 1,65] = 0,9 \rightarrow -1,65 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq 1,65$
 $\Leftrightarrow \frac{-1,65\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \leq \mu \leq \frac{1,65\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \rightarrow$ sustituyendo se obtiene el intervalo: $[1136,97 ; 1832,77]$.

Análogamente, de las tablas se obtiene que $P[-1,96 \leq Z \leq 1,96] = 0,95 \rightarrow -1,96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq 1,96 \Leftrightarrow \frac{-1,96\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \leq \mu \leq \frac{1,96\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \rightarrow$ sustituyendo se obtiene el intervalo: $[1071,60 ; 1898,14]$.

b) Pongamos $-1,65 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq 1,65 \Leftrightarrow \frac{-1,65\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X} \leq \mu \leq \frac{1,65\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{X}$. La amplitud del intervalo es $2 \frac{1,65\sigma}{\sqrt{n}}$, luego deberá ser $2 \frac{1,65\sigma}{\sqrt{n}} \leq 500$, de donde se obtiene $\sqrt{n} \geq 13,9161 \rightarrow n \geq 193,66$. Luego tomaremos $n = 194$.