



CURSO 2003/2004.	JUNIO. 2ª semana
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Indicar cual es la utilidad y el fundamento de la función generatriz de momentos.

Respuesta.-

La utilidad es 1) el cálculo de los momentos (respecto del origen) de la variable aleatoria y 2) la obtención de la distribución de la variable, ya que la función generatriz caracteriza la distribución (es decir, si dos variables X e Y tienen la misma función generatriz $g_X(t) = g_Y(t)$, entonces tienen la misma distribución).

Para que exista la función generatriz $g(t) = E[e^{xt}]$, debe ser convergente la serie $\sum_{i=1}^{\infty} e^{x_i t} P(X = x_i)$ en el caso discreto, o la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f(x) dx$ en el caso continuo.

2. Explicar conceptualmente la relación existente entre una distribución de Poisson y una Binomial.

Respuesta.-

Si X es binomial B(n, p) con n “grande” y p “pequeño”, se demuestra que X se comporta aproximadamente como una variable Poisson de parámetro $\lambda = n \cdot p$. Es decir,:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

3. ¿Cual es la interpretación del concepto “grados de libertad” a la hora de utilizar estimadores?

Respuesta.-

El número de grados de libertad es el número de variables aleatorias muestrales independientes con las que construimos el estimador. Si, por ejemplo, para estimar σ^2 usamos la varianza muestral $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ para una muestra aleatoria de tamaño n, las n variables:

$$X_1 - \bar{X}, X_2 - \bar{X}, X_3 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X}$$

no son independientes, ya que su suma es cero. Es decir, el número máximo de variables independientes entre ellas es de n - 1, que son los grados de libertad.

4. Explicar el concepto de estimador eficiente.

Respuesta.-

Un estimador es eficiente si es insesgado y su varianza es mínima es decir, que alcance la cota de Cramer-Rao:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{E \left[\left(\frac{\partial \ln dF_n}{\partial \theta} \right)^2 \right]}$$

PROBLEMAS

1.- La media de ventas de Líneas ADSL mensuales es de 12.000, con una desviación típica de 1.000 se nos pide con esta información que determinemos: a) La probabilidad de que las ventas mensuales estén comprendidas entre 10.000 y 14.000 líneas. b) Calcular el menor intervalo que incluya al menos el 95% de las ventas mensuales.



Solución.-

a) Como desconocemos la distribución de la variable $X = \text{"nº de ventas mensuales de líneas ADSL"}$, podemos aplicar la desigualdad de Chebychev:

$$P[|X - E(X)| < K] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{K^2}, \text{ o bien } P[E(X) - K < X < E(X) + K] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{K^2}$$

$$\text{Para } K = 2000 \rightarrow P[10000 < X < 14000] \geq 1 - \frac{10^6}{4 \cdot 10^6} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$\text{b) } P[12000 - K < X < 12000 + K] \geq 1 - \frac{10^6}{K^2} = 0,95 \rightarrow K = \sqrt{\frac{10^6}{0,05}} \cong 4472,14. \text{ El}$$

intervalo sería:

$$[7528, 16472]$$

2.- Si sabemos que los gastos en tecnología de la información de las grandes empresas europeas se distribuye como una normal $N(90,4)$, calcular la probabilidad de que en una muestra de 20 empresas la varianza muestral sea superior a 4,33.

Solución.-

La variable $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ se distribuye χ^2 con $n-1$ grados de libertad (teorema de Fisher).

Se tendrá:

$$P[S^2 > 4,33] = P\left[\chi_{19}^2 > \frac{19 \cdot 4,33}{16}\right] = P[\chi_{19}^2 > 5,14188] = 0,999303 \cong 1.$$