



CURSO 2003/2004.	JUNIO. 1ª semana
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Indicar cual es la utilidad de la covarianza entre variables.

Respuesta.-

La covarianza de una variable bidimensional (X, Y) proporciona una medida de la relación lineal entre las variables X e Y: cuando, al aumentar X, aumenta Y, la covarianza es positiva y cuando al aumentar X disminuye Y, la covarianza es negativa.

Debe precisarse que la covarianza no es una medida de la relación o dependencia entre ambas variables, sino que es únicamente una medida de la fuerza de la relación lineal entre ellas.

También debe tenerse en cuenta que el valor numérico de la covarianza no es significativo pues depende de las unidades de medida de X e Y.

2. ¿Qué limitación en cuanto a la información que facilita tiene el aplicar la desigualdad de Chebychev?. Razonar la respuesta.

Respuesta.-

La desigualdad de Chebychev proporciona una cota superior de la probabilidad de que la variable aleatoria X se aleje en más de una cierta cantidad k de la media. Es decir, la verdadera probabilidad será menor que la que proporciona la desigualdad de Chebychev.

En algunos casos incluso la información que proporciona es nula. Por ejemplo, de acuerdo con la desigualdad de Chebychev, $P[|X - E(X)| \geq \sigma] \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$, lo cual es obvio.

3. Qué función tiene la distribución muestral de los estimadores a la hora de realizar estimaciones mediante intervalos de confianza.

Respuesta.-

Si $\hat{\theta}$ es un estimador de un parámetro θ desconocido y suponemos conocida la función de densidad de $\hat{\theta}$ que representaremos por $g(\hat{\theta}, \theta)$, podemos encontrar un intervalo $[a, b]$, no necesariamente único, tal que $P[\hat{\theta} \in [a, b]] = 1 - \alpha$ dada. Es decir, $\int_a^b g(\hat{\theta}, \theta) = 1 - \alpha$. A este intervalo $[a, b]$ de $\hat{\theta}$ corresponderá un intervalo $[a', b']$ de θ , que es el intervalo de confianza de coeficiente $1 - \alpha$.

$$\text{Por ejemplo, si } 1 - \alpha = P\left[a < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} < b\right] = P\left[\bar{X} - \frac{b\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

4. Explicar el concepto de estimador insesgado.

Respuesta.-

Se denomina sesgo de un estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ a la diferencia $E(\hat{\theta}) - \theta$. Diremos que un estimador es insesgado cuando la anterior diferencia es cero, es decir, cuando $E(\hat{\theta}) = \theta$.

PROBLEMAS

1.- Un punto de atención al turista recibe una media de cuatro visitas diarias en los meses de temporada baja. Calcular:

a) El porcentaje de días que no se reciben visitas.

b) La probabilidad de que un día se reciban entre 3 y seis visitas.



c) Si durante la temporada baja el número de días que permanece abierto el punto de atención al turista es de 90 días, calcular la probabilidad de que en ese periodo se reciban menos de 150 visitas.

d) Justificar la distribución de probabilidad utilizada para la resolución del problema.

Solución.-

a) La variable $X = \text{"número de visitas diarias"}$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $E(X) = 4$. Así pues, de las tablas de la función de probabilidad de Poisson, se deduce que $P(X = 0) = 0,0183$.

b) De las tablas de la función de distribución de Poisson, $P[3 \leq X \leq 6] = 0,8893 - 0,2381 = 0,6512$.

c) Siendo $X_i, i = 1, 2, \dots, 90$, v.a. de Poisson de parámetro 4, la variable $Y = \sum_{i=1}^{90} X_i$ se distribuye aproximadamente normal $N(360, 2\sqrt{90})$. Por lo tanto:

$$P[Y < 150] = (\text{corrección por continuidad}) = P[Y \leq 149,5] = P\left[Z \leq \frac{149,5 - 360}{2\sqrt{90}}\right] = P[Z \leq -11,09] \approx 0.$$

d) El experimento que consiste en contar el número de sucesos que ocurren, de forma independiente, durante un intervalo de tiempo, se denomina de Poisson. La variable que proporciona dicho número sigue una distribución de Poisson.

Por otra parte, del Teorema central del límite se deduce que la suma de n variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, con media μ y varianza σ^2 , se distribuye aproximadamente $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$.

2.- Un estudio sobre los precios de un determinado tipo de televisores, nos da los siguientes precios de venta en euros:

1100, 300, 950, 790, 840, 820, 550, 700, 775, 770, 780, 670

Determinar, (si sabemos de antemano que los precios de venta siguen una distribución normal), los intervalos de confianza para el precio medio y para la varianza del precio, con un nivel de significación del 0,05.

Solución.-

La variable $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ se distribuye como una t-Student con 11 grados de libertad. De las tablas se obtiene:

$P[-2,201 < t_{11} < 2,201] = 0,95$, luego el intervalo :

$$-2,201 < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < 2,201 \Leftrightarrow \bar{X} - \frac{2,201S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{2,201S}{\sqrt{n}}.$$

En nuestro caso: $\bar{X} = 753,75$; $S = 197,77$; $n = 12$, de donde se obtiene el intervalo:

$$628,09 \leq \mu \leq 879,41$$

Por otra parte, la variable $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ se distribuye como una χ^2 con $n-1$ grados de libertad. De las tablas se obtiene: $P[3,82 \leq \chi^2_{11} \leq 21,92]$, luego el intervalo :

$$3,82 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq 21,92 \Leftrightarrow \frac{(n-1)S^2}{21,92} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{3,82}. \text{ Sustituyendo:}$$

$$19628 \leq \sigma^2 \leq 112760$$