



| | |
|--------------------------------|-------------------------------------|
| CURSO 2004/2005. | SEPTIEMBRE. Principal |
| Código de la Carrera 42 | Código de la Asignatura 209. |

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Comente brevemente si la Función de Distribución de una variable aleatoria puede ser decreciente.

Respuesta.-

No porque si X es la variable aleatoria y $x_1 \leq x_2$, entonces el suceso $[X \leq x_1] \subset [X \leq x_2]$, luego $F(x_1) = P[X \leq x_1] \leq P[X \leq x_2] = F(x_2)$.

2. Explicar conceptualmente cuando se puede decir que un estimador es consistente.

Respuesta.-

Sea $X = X_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ una variable aleatoria. Sea θ un parámetro y $\hat{\theta}_i = g(X_1, \dots, X_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, una sucesión de estimadores. Diremos que la sucesión es consistente si $\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon] = 1$ (es decir, converge en probabilidad hacia θ). Cada elemento de la sucesión es un estimador consistente.

3. ¿Por qué se puede aseverar que el método General o de Neyman para la construcción de intervalos de confianza tiene menos limitaciones que el método pivotal.?

Respuesta.-

Porque por el método pivotal hay que hallar una función de la muestra y del parámetro, cuya distribución sea independiente del parámetro, mientras que por el método general podemos obtener intervalos de confianza sin necesidad de que exista tal función independiente del parámetro.

4. Indicar qué estadístico se utiliza y la distribución de dicho estadístico para la realización de un contraste de hipótesis sobre la media de una población $N(\mu, \sigma)$ con σ desconocida. Justificar la respuesta.

Respuesta.-

El estadístico que se utiliza es $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$ (\bar{X} media muestral, S desviación típica muestral y n tamaño de la muestra) que se distribuye como una t-Student con $n - 1$ grados de libertad.

PROBLEMAS

1.- Una galería de arte vende 30 cuadros a la semana, con objeto de analizar la viabilidad del negocio, necesitan saber:

- Probabilidad de que las ventas en una semana sean menos de 10 cuadros.
- Probabilidad de que se vendan más de 50 cuadros en una semana.
- Indicar la función de distribución utilizada.

Solución.-

El modelo adecuado para analizar la distribución de la probabilidad de sucesos que ocurren de manera independiente durante un periodo de tiempo, lo proporciona la distribución de Poisson, en el caso del problema, de parámetro $\lambda = 30$, y por tanto $E(X) = 30$ y $\text{Var}(X) = 30$. Como λ es relativamente grande, haremos una aproximación por la distribución normal $N(30, \sqrt{30})$. Así pues:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X < 10) &= (\text{corrección por continuidad}) = P(X < 9,5) = P\left(Z < \frac{9,5 - 30}{\sqrt{30}}\right) = \\ &= P(Z < -3,74) \cong 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X > 50) &= (\text{corrección por continuidad}) = P(X > 50,5) = P\left(Z > \frac{50,5 - 30}{\sqrt{30}}\right) = \\ &= P(Z > 3,74) \cong 0. \end{aligned}$$

c) Como ya se ha indicado antes, se ha usado la distribución de Poisson, aproximada por una normal.

2.- Con el objeto de analizar el sector de reparación de automóviles en una ciudad, se selecciona una muestra aleatoria de 8 talleres de reparación de automóviles. A cada taller se le solicitan los resultados del ejercicio (beneficios o pérdidas). La información suministrada por la muestra utiliza como datos base los beneficios o pérdidas del último ejercicio cenado, pendientes de aplicación:

| | Talleres | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------|----|----|----|-----|----|-----|-----|
| | 1º | 2º | 3º | 4º | 5º | 6º | 7º | 8º |
| Resultados a 31/12/04* | 100 | 82 | 30 | 92 | 102 | 87 | 101 | -50 |

*(Datos en miles de euros)

a) ¿Se puede admitir con un 95% de confianza que la desviación típica de los resultados obtenidos es igual a 40.000 euros?

b) ¿Qué sucedería si aumentamos el nivel de confianza a un 99%?. Explicar el resultado obtenido.

Solución.-

a) Supondremos que los beneficios o pérdidas se distribuyen normalmente $N(\mu, \sigma)$. En este caso, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ se distribuye χ^2_{n-1} , donde $n = 8$ y S^2 , obtenida de la muestra dada resulta ser $S^2 = 2824,29$ en (miles de euros)².

De las tablas de la χ^2 para 7 grados de libertad, se obtiene el intervalo del 95% de confianza: [1,69 , 16,01]. Así pues:

$$\begin{aligned} 1,69 < \frac{7 \cdot 2824,29}{\sigma^2} < 16,01 &\Leftrightarrow \frac{7 \cdot 2824,29}{16,01} < \sigma^2 < \frac{7 \cdot 2824,29}{1,69} \Leftrightarrow 1234,64 < \sigma^2 < 11699,13 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 35,14 < \sigma < 108,16 \quad (\text{en miles de euros}). \end{aligned}$$

Por tanto sí podemos admitir con el 95% de confianza que σ es igual a 40000 €.

b) Si aumentamos el nivel de confianza, se obtiene un intervalo que contiene al anterior, luego hay más motivo (un 99% de confianza) de que el valor de $\sigma = 40000$ € pertenezca a él.