

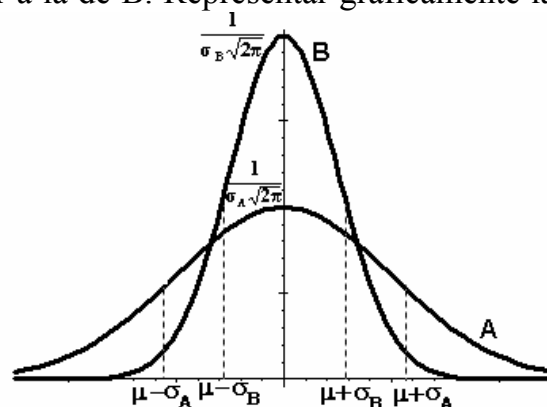
CURSO 2005/2006.	SEPTIEMBRE.PRINCIPAL
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Qué interpretación tiene el hecho de que en dos distribuciones normales A y B con medias iguales $\mu_A = \mu_B$, la varianza de A sea superior a la de B. Representar gráficamente las distribuciones de densidad de ambas poblaciones.

Respuesta.-

Las abscisas de los puntos de inflexión de la función de densidad normal $N(\mu, \sigma)$ son $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$. El valor máximo de la función de densidad se obtiene para $x = \mu$ y es $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Por tanto será $f(\mu_A) < f(\mu_B)$, es decir B más apuntada que A.



2. Explicar conceptualmente cuándo se puede decir que un estimador es consistente.

Respuesta.-

Un estimador $\hat{\theta}_n$ de un parámetro θ , es consistente cuando, al aumentar el tamaño n de la muestra, $\hat{\theta}_n$ tiende en probabilidad a θ , es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon] = 1, \forall \varepsilon > 0$$

3. ¿Qué es y para qué se usa el error cuadrático medio de un estimador?

Respuesta.-

El error cuadrático medio de $\hat{\theta}$ es:

$$ECM(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

Desarrollando esta expresión se demuestra que $ECM(\hat{\theta}) = Var(\hat{\theta}) + Sesgo^2(\hat{\theta})$. Un estimador será mejor cuanto menor sea su ECM.

4. ¿Qué efecto tiene un incremento del tamaño muestral sobre la potencia de un contraste?

Respuesta.-

Para un nivel de significación fijo α , si aumenta el tamaño de la muestra disminuye el error β de tipo II, y por lo tanto, aumenta la potencia del contraste $1 - \beta$.

PROBLEMAS

1. Una compañía de seguros tiene en la actualidad 3.000 pólizas contratadas, que cubren al asegurado de un accidente doméstico. La incidencia de este tipo de accidentes es del 3 por mil. En caso de accidente la compañía indemniza al asegurado con 1.000€.

a) Probabilidad de que ocurran menos de 3 siniestros.

b) Probabilidad de que ocurran al menos 5 siniestros.



c) Calcular la esperanza matemática de la indemnización.

d) Justificar la distribución de probabilidad utilizada para la resolución del problema.

Solución.-

La variable $X = \text{"nº de accidentes"}$ es binomial $B(3000; 0,003)$ que se comportará aproximadamente normal $N(9,3\sqrt{0,997}) \cong N(9, 3)$. Así pues:

a) $P[X < 3] = (\text{corrección por continuidad}) = P[X \leq 2,5] = (\text{tipificación}) = P[Z \leq -2.17] =$
 $= (\text{tablas}) = 0,015.$

b) $P[X \geq 5] = (\text{corrección por continuidad}) = P[X \geq 4,5] = (\text{tipificación}) = P[Z \geq -1.5] =$
 $= (\text{tablas}) = 0,9332$

c) La indemnización es $1000X$, luego $E(1000X) = 1000E(X) = 9000 \text{ €}$.

d) El teorema de Moivre permite aproximar una distribución binomial $B(n, p)$ mediante una distribución normal $N(np, \sqrt{np(1-p)})$, siendo la aproximación aceptable cuando $np > 5$ y $p \leq \frac{1}{2}$, circunstancias que se cumplen en el problema.

2. En un website se estudia el comportamiento de 150 usuarios, observándose que el tiempo medio de estancia es de 2 minutos. Sabemos que la varianza poblacional es de $0,36 \text{ minutos}^2$. Sin conocer la distribución poblacional queremos obtener un intervalo del tiempo medio de estancia en el website con un nivel de confianza del 99%

Solución.-

Siendo μ y σ^2 la media y la varianza poblacionales, respectivamente, entonces para la media muestral \bar{X} se cumple que $E(\bar{X}) = \mu$ y $\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Luego, por el teorema de Chebychev:

$$P[|\bar{X} - \mu| \leq \varepsilon] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Para $n = 150$, $\sigma^2 = 0,36$ y un nivel de confianza del 99%, será: $1 - \frac{0,36}{150\varepsilon^2} \geq 0,99 \rightarrow$

$\rightarrow \varepsilon \geq \frac{6}{\sqrt{150}} \cong 0,49$. El intervalo será: $|2 - \mu| \leq 0,49 \leftrightarrow 1,51 \leq \mu \leq 2,49$