



<b>CURSO 2005/2006.</b>	<b>SEPTIEMBRE RESERVA</b>
<b>Código de la Carrera 42</b>	<b>Código de la Asignatura 209.</b>

### PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Razone porqué se puede obtener la distribución de Poisson como límite de la distribución Binomial.

**Respuesta.-**

Porque si en la expresión que da la probabilidad de que  $X = x$ , para una variable  $X$  binomial  $B(n, p)$ , a saber  $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ , hacemos que  $n \rightarrow \infty$ , y ponemos  $p = \frac{\lambda}{n}$ , se demuestra que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ , que es la expresión de la probabilidad de que  $X = x$  para una variable de Poisson de parámetro  $\lambda$ .

2. Razonar si el Coeficiente de variación se ve afectado por cambios de origen y de escala.

**Respuesta.-**

Teniendo en cuenta que  $E(X+a) = E(X) + a$ ,  $\text{Var}(X+a) = \text{Var}(X)$ ,  $E(aX) = aE(X)$  y  $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$  se tiene:

Cambio de origen: sea  $Y = X + a \rightarrow CV_Y = \frac{\sigma_Y}{E(Y)} = \frac{\sigma_X}{E(X) + a} \neq \frac{\sigma_X}{E(X)} \rightarrow$  sí que se ve afectado.

Cambio de escala: sea  $Y = aX \rightarrow CV_Y = \frac{\sigma_Y}{E(Y)} = \frac{a\sigma_X}{aE(X)} = \frac{\sigma_X}{E(X)} \rightarrow$  no se ve afectado.

3. Explique conceptualmente si existe diferencia entre distribución muestral de un estadístico y distribución de la población.

**Respuesta.-**

Sí que existe diferencia. Si  $X$  es una variable aleatoria con una determinada distribución, esa es la distribución de la población.

Un estadístico es una determinada función muestral  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , siendo  $X_i = X$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . La distribución del estadístico  $Y$  es diferente de la distribución de la población.

4. ¿Son insesgados los estimadores obtenidos por el método de los momentos?

**Respuesta.-**

Sí cuando los parámetros que se pretende estimar son momentos poblacionales respecto del origen.

### PROBLEMAS

1.- Según los datos del INE para el 2º trimestre del año 2003, el gasto real medio por persona en artículos de vestir y calzado, se distribuye normalmente, y es de 122 euros. Tomamos una muestra de 16 personas para estimar la varianza muestral y obtenemos que esta es de 105 euros<sup>2</sup>. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 117 y 125 euros?

### Solución.-

Sea  $X$  la variable aleatoria “gasto real medio por persona” que se distribuye normal  $N(122, \sigma)$ . Si  $\bar{X}$  es la media muestral y  $S$  la desviación típica muestral, sabemos que  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  se distribuye como una  $t$ -Student con  $n-1$  grados de libertad. Se tendrá:

$$P(117 < \bar{X} < 125) = P\left(\frac{117 - 122}{\sqrt{105}} \cdot 4 < t_{15} < \frac{125 - 122}{\sqrt{105}} \cdot 4\right) = P(-1,952 < t_{15} < 1,171) =$$
  
 $= F_{15}(1,171) - 1 + F_{15}(1,952)$ , donde  $F_{15}$  es la función de distribución de  $t_{15}$ . En las tablas no encontramos  $F_{15}(1,171)$  ni  $F_{15}(1,952)$  pero podemos interpolar:

$$\frac{F_{15}(1,171) - F_{15}(1,074)}{1,171 - 1,074} = \frac{F_{15}(1,341) - F_{15}(1,074)}{1,341 - 1,074} \leftrightarrow \frac{F_{15}(1,71) - 0,850}{0,097} = \frac{0,900 - 0,850}{0,267} \leftrightarrow F_{15}(1,71) = 0,868$$

$$\frac{F_{15}(1,952) - F_{15}(1,753)}{1,952 - 1,753} = \frac{F_{15}(2,131) - F_{15}(1,753)}{2,131 - 1,753} \leftrightarrow \frac{F_{15}(1,952) - 0,950}{0,199} = \frac{0,975 - 0,950}{0,378} \leftrightarrow F_{15}(1,952) = 0,963$$

Así pues:  $P(117 < \bar{X} < 125) = 0,868 - 1 + 0,963 = 0,831$

**2.-** Las ventas medias semanales de la revista  $X$  según un estudio publicado por una auditoria de medios es de 20.000 ejemplares. La editorial que vende la revista  $X$  discrepa sobre ese dato y por ello encarga un estudio de mercado para contrastar el mismo, del cual y con una muestra tomada durante 10 semanas se obtiene que su venta media semanal es de 22.000 ejemplares y que su varianza es de 9.000.000. Con esta información y suponiendo un comportamiento normal de la variable estudiada, la empresa quiere contrastar a un nivel de significación del 0,05 si su venta media semanal realmente es mayor que la publicada.

### Solución.-

Representemos por  $X$  la venta semanal. Establezcamos las hipótesis:

$$H_0: \mu \leq 20000$$

$$H_1: \mu > 20000$$

La variable  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$  es  $t_{n-1}$ , y para  $n = 10$  y un nivel de significación 0,05, las tablas proporcionan la región crítica:  $t_9 > 1,833$ .

Para los datos del problema:  $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{22000 - 20000}{3000/\sqrt{10}} = \frac{2000}{948,68} \approx 2,108$  que está dentro de la región crítica, por lo que rechazamos la hipótesis nula y por tanto la venta media semanal es realmente mayor que la publicada.