

CURSO 2007/2008.	JUNIO. 1ª semana
Código de la Carrera 42	Código de la Asignatura 209.

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Razonar si la varianza se ve afectada por cambios de origen y de escala.

Respuesta.-

Consideremos la variable aleatoria X y sea $Y = \frac{X-a}{b}$, donde a y b son constantes,

$b \neq 0$. Se tiene que $\text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\frac{X-a}{b}\right) = \frac{\text{Var}(X-a)}{b^2} = \frac{\text{Var}(X)}{b^2}$. Así pues, la varianza no se ve afectada por el cambio de origen pero sí se ve afectada el cambio de escala de forma que si una variable se divide por b , su varianza se ve dividida por b^2 .

2. ¿Qué relación existe entre una variable aleatoria t de Student y las distribuciones Normal y ji-cuadrado de Pearson?

Respuesta.-

Si U es una variable aleatoria normal $N(0, 1)$ y V es una variable aleatoria ji-cuadrado con n grados de libertad, entonces la variable aleatoria $T = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$ se distribuye como una

t de Student con n grados de libertad.

3. Definir la consistencia de un estimador.

Respuesta.-

Se dice que un estimador $\hat{\theta}_n = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de un parámetro θ es consistente si, al aumentar n , entonces $\hat{\theta}_n$ converge en probabilidad a θ , es decir que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon\right] = 1$

4. Explicar conceptualmente el significado del Lema de Neyman-Pearson.

Respuesta.-

Sea $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple y $L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \theta)$ la función de verosimilitud. Se desea contrastar las hipótesis:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta = \theta_1$$

Sea k un número positivo fijado y C una región de \mathbb{R}^n , de tamaño α , es decir que $P[(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \in C / \theta = \theta_0] = \alpha$. Entonces C es la mejor región crítica de tamaño α (proporciona el contraste de nivel de significación α más potente) si se cumple que:

$$\frac{L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \theta_0)}{L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \theta_1)} \leq k, \text{ para } (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in C \text{ y}$$

$$\frac{L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \theta_0)}{L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \theta_1)} \geq k, \text{ para } (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \bar{C}$$

PROBLEMAS

1.- Las aportaciones de un país desarrollado a la financiación al desarrollo de otros países en vías de desarrollo se desagrega en aportaciones gubernamentales, X y aportaciones no gubernamentales Y . Llamando (X,Y) a la variable aleatoria bidimensional de aportaciones, y sabiendo que X e Y son independientes y tienen medias 0,2 y 0,3 billones de u.m., y desviaciones típicas 0,05 y 0,02 billones de u.m. respectivamente, se pide:

- ¿Qué tipo de aportación presenta menor coeficiente de variación?
- La esperanza y la desviación típica de las aportaciones totales, $X + Y$.
- Acotar superiormente la probabilidad de que se atiendan con estas aportaciones la creación de proyectos concretos valorados en 0,6 billones de u.m.

Respuesta.-

$$\text{a) } CV_X = \frac{0,05}{0,2} = 0,25 ; CV_Y = \frac{0,02}{0,3} \cong 0,07, \text{ luego } CV_Y < CV_X$$

$$\text{b) } E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 0,2 + 0,3 = 0,5$$

Como X e Y son independientes, $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 0,0025 + 0,0004 = 0,0029$, luego la desviación típica $DT_{X+Y} = \sqrt{0,0029} \cong 0,0539$.

$$\text{c) } P[X+Y \geq 0,6] = P[X+Y - 0,5 \geq 0,1] \leq P[|X+Y - 0,5| \geq 0,1] \leq (\text{desigualdad de Chebychev}) \leq \frac{0,0029}{0,01} = 0,29.$$

2.- Una empresa de telefonía, que pretende implantarse en Argentina y con objeto de estudiar la viabilidad del proyecto, quiere obtener un intervalo de confianza del 90% para el tiempo medio de duración de las llamadas de teléfonos móviles a fijos en dicho país. De una muestra sobre 20 llamadas se obtiene que el tiempo medio de duración es de 10 minutos con una desviación típica de 3 minutos. Determinar el tamaño de la muestra necesario para obtener un intervalo de ± 1 minuto sabiendo que la distribución poblacional es normal.

Solución.-

Siendo X = “tiempo de duración de una llamada” se tiene que $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ es t_{n-1} y

$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \right]$ es el intervalo de confianza de nivel $100(1-\alpha)\%$. La amplitud del

intervalo es $L = 2t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = 4 \frac{S^2 t_{\alpha/2}^2}{L^2}$, estimándose $t_{\alpha/2}$ y S de la muestra dada (muestra piloto). En nuestro caso se tiene: $P[t_{19} > t_{0,05}] = 0,05 \rightarrow t_{0,05} = 1,729$, $S = 3$ y $L = 2$ de donde:

$$n = 4 \cdot \frac{9 \cdot 1,729^2}{2^2} \cong 27$$