



EXÁMENES RESUELTOS JUNIO 2001

PRINCIPAL

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. ¿Cuándo se puede decir que una distribución es uniforme?

Una variable aleatoria sigue una distribución uniforme en un intervalo $[a, b]$, si la probabilidad de que X pertenezca a un subintervalo de longitud d es proporcional a d . Si es discreta, su función de probabilidad es $P(X_i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ y cero en el resto.

Si es continua, su función de densidad es $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$

2. Indicar las diferencias entre: función de densidad, de cuantía y de distribución.

Función de densidad: si X es v.a. continua y $f(x)$ es una función no negativa tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, de manera que $F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, entonces f es una función de densidad.

Si X es una v.a. discreta, la función $f(x) = P[X = x]$ es una función de cuantía.

En cualquier caso (tanto si X es discreta como continua), la función $F(x) = P[X \leq x]$ es una función de distribución.

3. Indicar la relación existente entre un contraste de hipótesis paramétrico y el error de tipo I.

Se establece una hipótesis nula H_0 y una hipótesis alternativa H_1 . Efectuado el contraste, se denomina error de tipo I el que se comete al rechazar H_0 , siendo cierta.

4. Indicar los factores que influyen sobre la precisión de una estimación por intervalos de confianza.

El coeficiente de confianza $1 - \alpha$ y la amplitud del intervalo. Para un mismo $1 - \alpha$, a menor amplitud, mayor precisión. Para una misma amplitud, a mayor $1 - \alpha$, mayor precisión.

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

1. Se ha evaluado a través de un test de seguimiento el comportamiento de los vendedores de nuestra empresa, las puntuaciones obtenidas van de 0 a 10, la nota media fue de 6,7 y la desviación típica de 1,2. Suponiendo que las notas siguen una distribución normal, determinar:

- a).- El porcentaje de vendedores que sacaron entre 5 y 6.
- b).- La puntuación máxima del 10% más bajo.
- c).- La nota mínima del 10% más alto.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P[5 \leq X \leq 6] &= P\left[\frac{-1,7}{1,2} \leq Z \leq \frac{-0,7}{1,2}\right] = 0,2015; \quad \text{b)} \quad 0,1 = P[X \leq p] = \\ &= P\left[Z \leq \frac{p-6,7}{1,2}\right] \Rightarrow \frac{p-6,7}{1,2} = -1,2815 \Rightarrow p = 5,16; \quad \text{c)} \quad 0,9 = P[X \leq p] = \\ &= P\left[Z \leq \frac{p-6,7}{1,2}\right] \Rightarrow \frac{p-6,7}{1,2} = 1,2815 \Rightarrow p = 8,24 \end{aligned}$$

2. Una empresa producía aparatos de precisión cuya duración media era de 600 horas con una varianza de 4.000 horas². Con el fin de mejorar el periodo de duración se introdujo un cambio en los materiales utilizados. Para ver si estos cambios han sido efectivos, del primer lote de la nueva producción se han extraído aleatoriamente 10 aparatos, que han sido sometidos a diversas pruebas de donde se han obtenido las siguientes duraciones medias:

580, 590, 620, 530, 700, 650, 610, 630, 590, 670

Determinar, (si sabemos de antemano que las horas medias de duración siguen una distribución normal, y que la introducción de los nuevos materiales ha afectado a la varianza de las horas medias) si realmente la modificación ha supuesto una mejora en la duración de los aparatos, con un nivel de significación del 0,05.

Establecemos las hipótesis $H_0: \mu \leq 600$ y $H_1: \mu > 600$. La variable aleatoria $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n}$ es t_{n-1} . Para el nivel de significación exigido, la región de rechazo viene determinada por $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{10} > 1,833$. De los datos se obtiene $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{10} = \frac{617 - 600}{48,77} \sqrt{10} = 1,1022$ luego debemos aceptar la hipótesis H_0 , es decir, la modificación no ha supuesto una mejora en la duración de los aparatos, con un nivel de significación del 0,05.

RESERVA

PRIMERA PARTE: CUESTIONES TEÓRICO-CONCEPTUALES

1. Explique qué condiciones debe cumplir una función $f(x)$ de una variable aleatoria continua X para que se la pueda considerar como función de densidad.

- 1) $f(x) \geq 0, x \in]-\infty, +\infty[$
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

2. ¿Qué relación existe entre una $N(\mu, \sigma)$ y una $N(0, 1)$?

Si X es $N(\mu, \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ es $N(0, 1)$

3. Explicar el concepto de estimación puntual y estimación por intervalos.

Si θ es un parámetro desconocido de la distribución de una variable aleatoria X , la estimación puntual consiste en, elegida una muestra X_1, X_2, \dots, X_n , hallar una variable aleatoria $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (estimador), que posea todas o algunas de las propiedades de los estimadores (insesgado, consistente,...). Cada uno de los valores que toma es una **estimación** (puntual).

La estimación por intervalos consiste en hallar un intervalo en el cual, la probabilidad de encontrar a θ sea $1 - \alpha$ (coeficiente de confianza). El objetivo consiste en que la amplitud del intervalo sea pequeña y $1 - \alpha$ grande.

4. Indicar la relación existente entre error de tipo I y error de tipo II

El error de tipo I consiste en rechazar la hipótesis H_0 , siendo cierta. El error de tipo II consiste en aceptar la hipótesis H_0 , siendo falsa.

Si representamos por α el error de tipo I y por β el de tipo II, entonces para un valor fijo del tamaño muestral n , si aumenta α disminuye β y viceversa, aunque no en la misma cuantía.



SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

1. Un agente de seguros contrata 5 seguros de vida con personas de la misma edad y que gozan de buena salud. Según las estimaciones disponibles, la probabilidad de que una persona con dichas características continúe viva dentro de 20 años es de $2/3$. Calcular la probabilidad de que dentro de 20 años sigan vivos: **a)** las 5 personas; **b)** al menos 3 personas; **c)** más de 2 personas.

La variable X = “número de personas que siguen vivas dentro de 20 años” es $B(5, 2/3)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X = 5) &= \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cong 0,13; \text{ b) } P(X \geq 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) + \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cong \\ &\cong 0,79; \text{ c) } P(X > 2) = P(X \geq 3) \cong 0,79 \end{aligned}$$

2. En una medición sobre la respuesta de compra a determinado producto, se estima que la desviación típica es de 0,05. ¿Que tamaño muestral ha de tomarse para tener una confianza del 95% de que el error de estimación no es de 0,01 ?

$$\begin{aligned} |\bar{X} - \mu| \text{ es el error de la estimación. De la desigualdad de Chebychev,} \\ P\left[|\bar{X} - \mu| < k\right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{nk^2}, \text{ poniendo } k = 0,01 \text{ y } 1 - \frac{\sigma^2}{nk^2} \geq 0,95 \rightarrow \frac{\sigma^2}{nk^2} \leq 0,05 \rightarrow \\ \rightarrow n \geq \frac{\sigma^2}{0,05k^2} = 500 \end{aligned}$$