

Método de Hermite.-

La mejor manera de resolver una integral racional con raíces complejas en el denominador es el método de Hermite, que consiste en escribir la integral de la siguiente forma:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{f(x)}{D(x)} + \int \frac{g(x)}{d(x)} dx$$

donde $D(x) = \text{MCD}[Q(x), Q'(x)]$, $d(x) = \frac{Q(x)}{D(x)}$ y $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios a coeficientes indeterminados cuyo grado es una unidad menor que el de su respectivo denominador.

Ejemplo.- $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$. Ponemos:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 + 1} dx$$

Derivando en ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{A(x^2 + 1) - 2x(Ax + B)}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

quitando denominadores y agrupando términos semejantes:

$$1 = Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B + C)x + (A + D)$$

identificando coeficientes de ambos miembros de la igualdad:

$$A = \frac{1}{2}, B = 0, C = 0, D = \frac{1}{2}$$

luego:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctg x \right) + C$$