

$$\text{Integrales de la forma I} = \int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{n_1}{m_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{n_2}{m_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{n_r}{m_r}} \right) dx.$$

donde R significa “función racional” es decir, los términos comprendidos en el paréntesis que abarca R están sometidos únicamente a las operaciones de sumar, restar, multiplicar o dividir, y n_i y m_i ($i = 1, 2, \dots, r$) son números enteros.

Se convierten en la integral de una función racional de t, efectuando el cambio:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \text{ siendo } m = \text{mcm}(m_1, m_2, \dots, m_r)$$

Ejemplo 1:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{1-x} dx &= (\text{de acuerdo con el modelo anterior, procede el cambio } 1-x = t^2) = \int -(t^4 - 2t^2 + 1) \cdot t \cdot 2tdt = \\ &= \int (-2t^6 + 4t^4 + 2t^2) dt = (\text{inmediata}) = -\frac{2}{7}t^7 + \frac{4}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = (\text{deshaciendo el cambio}) = \\ &= \left(-\frac{2}{7}(1-x)^3 + \frac{4}{5}(1-x)^2 + \frac{2}{3}(1-x) \right) \sqrt{1-x} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{aligned} \int \frac{-x}{(x+1)-\sqrt{x+1}} dx &= (\text{procede el cambio } x+1 = t^2) = \int \frac{1-t^2}{t^2-t} 2tdt = -\int 2(1+t)dt = -2t - t^2 + C = \\ &= (\text{deshaciendo el cambio}) = -2\sqrt{x+1} - x - 1 + C \end{aligned}$$

$$\text{Integrales de la forma I} = \int \frac{1}{\sqrt{p-(qx+r)^2}} dx, \text{ con } p > 0.$$

Dividiendo numerador y denominador por \sqrt{p} se tiene:

$$I = \int \frac{\frac{1}{\sqrt{p}}}{\sqrt{1-\left(\frac{qx+r}{\sqrt{p}}\right)^2}} dx, \text{ y ahora multiplicando numerador y denominador por } q:$$

$$I = \frac{1}{q} \int \frac{\frac{q}{\sqrt{p}}}{\sqrt{1-\left(\frac{qx+r}{\sqrt{p}}\right)^2}} dx, \text{ que es inmediata} = \frac{1}{q} \arcsen \frac{qx+r}{\sqrt{p}} + C.$$

$$\text{Integrales de la forma I} = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx, \text{ con } a < 0.$$

Vamos a reducirla a la forma anterior, para lo cual escribiremos:

$$ax^2 + bx + c = c - \frac{b^2}{4a} - \left(\sqrt{|a|}x - \frac{b}{2\sqrt{|a|}} \right)^2$$

(compruébese que es correcto)

Y entonces, si $c - \frac{b^2}{4a} > 0$, la anterior expresión es de la forma $p - (qx + r)^2$, que está resuelta en el caso anterior.

Ejemplos:

$$a) I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x-1)^2}} = \arcsen(x-1) + C$$

$$b) I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x-2)^2}} = \arcsen\left(\frac{x-2}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Método general para el cálculo de integrales de la forma $\int R[\sqrt{ax^2 + bx + c}, x] dx$, donde R representa cualquier función racional.-

1º caso: $a > 0$:

Se hace el cambio de variable $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}x + t$. Elevando al cuadrado, despejando x, y sustituyendo en la integral, se convierte en la integral de una función racional.

Ejemplo:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx; \text{ cambio } \sqrt{x^2 + x + 1} = x + t \rightarrow x^2 + x + 1 = x^2 + 2xt + t^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x(1-2t) = t^2 - 1 \leftrightarrow x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} \rightarrow dx = \frac{-2t^2 + 2t - 2}{(1 - 2t)^2} dt; \text{ sustituyendo y simplificando se}$$

$$\text{obtiene } I = \int \frac{2}{1 - 2t} dt = -\ln|1 - 2t| + C = (\text{deshaciendo el cambio}) =$$

$$-\ln|1 + 2x - 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + C$$

2º caso: $c \geq 0$:

Se hace el cambio de variable $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{c} + xt$. Elevando al cuadrado, simplificando y despejando x, y sustituyendo en la integral, se convierte en la integral de una función racional. Ejemplos:

(las integrales anteriores, pero hechas de otra manera)

$$a) I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}; \text{ como } c = 0, \text{ hago el cambio } \sqrt{2x - x^2} = xt \rightarrow 2x - x^2 = x^2 t^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow 2 - x = xt \leftrightarrow x(t+1) = 2 \leftrightarrow x = \frac{2}{t+1} \rightarrow dx = \frac{-4t}{(t^2 + 1)^2} dt; \text{ sustituyendo en la integral y}$$

simplificando, se obtiene: $I = \int \frac{-2}{t^2 + 1} dt = (\text{inmediata}) = -2 \arctg t + C = (\text{deshaciendo el cambio}) = -2 \arctg \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x} + C$

b) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x - x^2}}$; cambio $\sqrt{1 + 4x - x^2} = 1 + xt$, elevando al cuadrado, simplificando, despejando x y sustituyendo en la integral y volviendo a simplificar, se obtiene:
 $I = \int \frac{-2}{t^2 + 1} dt = -2 \arctg t + C = (\text{deshaciendo el cambio}) = -2 \arctg \frac{\sqrt{1 + 4x - x^2} - 1}{x} + C$

Observación.- Según se hagan las integrales por un método u otro pueden presentar distintos resultados, pero dos resultados cualesquiera de una misma integral se diferenciarán en una constante.

3º caso: $a < 0$ y $c < 0$:

Si α es una raíz (real) del polinomio $ax^2 + bx + c$, se hace el cambio

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t$$

Elevando al cuadrado, simplificando, despejando x y sustituyendo en la integral, se convierte en la integral de una función racional. Ejemplo:

$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$; las raíces de $-x^2 + 3x - 2$ son 1 y 2, es decir $-x^2 + 3x - 2 = -(x - 1)(x - 2)$. Hacemos el cambio $\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = (x - 1)t \rightarrow$ elevando al cuadrado $-(x - 1)(x - 2) = (x - 1)^2 t^2 \Leftrightarrow 2 - x = (x - 1)t^2 \Leftrightarrow x = \frac{t^2 + 2}{t^2 + 1} \rightarrow dx = \frac{-2t}{(t^2 + 1)^2} dt$.

Sustituyendo en la integral y simplificando, se obtiene: $I = \int \frac{-2}{t^2 + 2} dt = \int \frac{-1}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt = -\sqrt{2} \arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C = (\text{deshaciendo el cambio}) = -\sqrt{2} \arctg \frac{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}{\sqrt{2}(x - 1)} + C$