



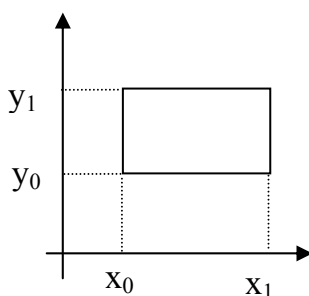
APUNTES SOBRE LAS INTEGRALES DOBLES

Conviene recordar en primer lugar que una integral doble es la “integral de una integral”, es decir:

$I = \iint_R f(x, y) dx dy = \int_R \left(\int_R f(x, y) dy \right) dx$, que suele escribirse $\int_R dx \int_R f(x, y) dy$, o lo que es lo mismo: $\int_R \left(\int_R f(x, y) dx \right) dy$ que suele escribirse $\int_R dy \int_R f(x, y) dx$.

Para calcularla, se comienza por la segunda integral $\int_R f(x, y) dy$ que, una vez resuelta, será una cierta función de x , $F(x)$; a continuación, por tanto, hay que calcular $\int_R F(x) dx$.

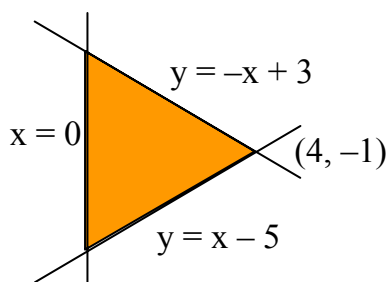
-Si el recinto R es un rectángulo:



entonces $x_0 \leq x \leq x_1$; $y_0 \leq y \leq y_1$, variación que se produce de forma independiente para cada variable. La integral en este caso sería $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy$

- Si el recinto R no es un rectángulo: entonces x e y no varían de forma independiente la una de la otra. En este caso, si fijamos x , la y variará en un intervalo que dependerá del x escogido.

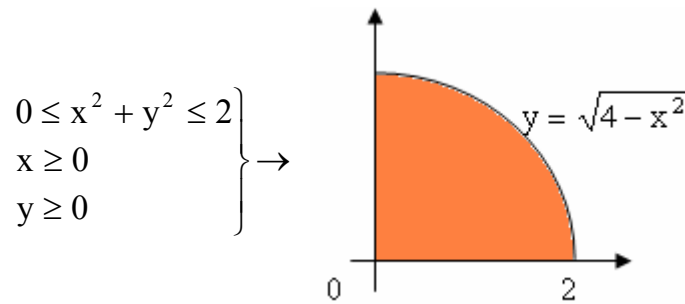
Por ejemplo, sea el recinto limitado por las rectas $x = 0$, $y = x - 5$, $y = -x + 3$:



entonces x toma valores comprendidos entre 0 y 4, pero y toma valores que dependen de x . Para un x fijo cualquiera (entre 0 y 4), la y varía entre $x-5$ y $-x+3$. Una integral doble en ese recinto sería:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^4 dx \int_{x-5}^{-x+3} f(x, y) dy$$

Otro ejemplo: el recinto es un cuadrante de círculo de radio 2:



Entonces x toma valores de 0 a 2 pero y toma valores de 0 a $\sqrt{4 - x^2}$.
Una integral doble en ese recinto sería:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy$$

en este último ejemplo, dependiendo de la forma que tenga $f(x, y)$, es posible que sea conveniente hacer un cambio a coordenadas polares, pues en ese caso el recinto sería

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} ; 0 \leq \rho \leq 2$$

siendo θ y ρ variables independientes (el recinto se ha convertido en un rectángulo), y la integral sería:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho$$