

## INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES DE SENO Y COSENO

### Conceptos previos.-

#### **Función par.-**

Una función  $y = f(x)$  es **par** si se cumple que  $f(-x) = f(x)$ .

Ejemplos: 1)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$ ; 2)  $f(x) = \frac{\text{sen} x}{x}$ , etc.

#### **Función impar.-**

Una función  $y = f(x)$  es **impar** si se cumple que  $f(-x) = -f(x)$ .

Ejemplos: 1)  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 5}$ ; 2)  $f(x) = \frac{\text{sen}^2 x}{x}$ , etc.

#### **Función par en seno.-**

Una función trigonométrica es **par en seno** si al sustituir **sen x** por **-sen x** la función no varía.

Ejemplos:  $f(x) = \frac{\cos x + 1}{\text{sen}^2 x}$ ; etc.. Debe tenerse en cuenta que es posible que la expresión **sen x** no aparezca explícitamente. Por ejemplo,  $f(x) = 1 + \text{tg}^2 x$  también es par en seno pues  $\text{tg}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$ ; o por ejemplo  $f(x) = \cos x$ , ya que podemos escribir  $f(x) = \cos x \cdot \text{sen}^0 x$ .

Análogamente se definiría **función par en coseno**.

#### **Función impar en seno.-**

Una función trigonométrica es **impar en seno** si al sustituir **sen x** por **-sen x** la función cambia de signo.

Ejemplos: 1)  $f(x) = \text{sen} x$ ; 2)  $f(x) = \frac{\text{sen}^3 x}{\cos x + \text{sen}^2 x}$ ; 3)  $f(x) = \text{tg} x$ , etc..

Análogamente se definiría **función impar en coseno**.

#### **Función par en seno y coseno (simultáneamente).-**

Cuando al sustituir **sen x** y **cos x** por **-sen x** y **-cos x**, respectivamente, la función no varía..

Ejemplos: 1)  $f(x) = \frac{1}{1 + \text{sen} x \cdot \cos x}$ ; 2)  $f(x) = \text{tg} x$ ; etc.

## Integración de las funciones racionales de sen x y cos x: $\int R(\text{sen} x, \cos x) dx$ .-

Se resuelven por el método de sustitución, recomendándose los siguientes cambios:

-1<sup>er</sup> caso:  $R(\text{sen} x, \cos x)$  es impar en sen x → **cambio cos x = t**

de donde:  $\text{sen} x = \sqrt{1 - t^2}$  y  $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$  lo cual convierte la integral en la de una función racional de la variable t

Ejemplo:  $I_{49} = \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos^2 x} dx$  es impar en  $\sin x$ ; haciendo el cambio  $\cos x = t$ , se tiene:

$$I_{49} = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2} \cdot t^2} \cdot \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1}{t^2(t^2-1)} dt. \text{ Efectuando la descomposición de } \frac{1}{t^2(t^2-1)} \text{ en}$$

suma de fracciones simples, se obtiene:

$$\frac{1}{t^2(t^2-1)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{t-1} = \frac{A(t^2-1) + Bt(t^2-1) + Ct^2(t-1) + Dt^2(t+1)}{t^2(t^2-1)}, \text{ de donde}$$

$$A = -1; B = 0; C = -\frac{1}{2}; D = \frac{1}{2} \rightarrow \int \frac{1}{t^2(t^2-1)} dt = \int \left( \frac{-1}{t^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t-1} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{t} + \ln \sqrt{\left| \frac{t-1}{t+1} \right|} + C = \sec x + \ln \sqrt{\left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right|} + C = \sec x + \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C$$

**-2º caso:  $R(\sin x, \cos x)$  es impar en  $\cos x \rightarrow$  cambio  $\sin x = t$**

de donde:  $\cos x = \sqrt{1-t^2}$  y  $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ , lo cual convierte la integral en la de una función racional de la variable  $t$ .

Por ejemplo  $I_{51} = \int \frac{\cos^3 x}{4 \sin^2 x - 1} dx$  es impar en  $\cos x \rightarrow$  cambio  $\sin x = t \rightarrow$

$$I_{51} = \int \frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{4t^2-1} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1-t^2}{4t^2-1} dt, \text{ que ya es una integral racional.}$$

**3º caso:  $R(\sin x, \cos x)$  es par en  $\sin x$  y  $\cos x$  (simultáneamente)  $\rightarrow$  cambio  $\tan x = t$**

de donde:  $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$ ;  $\sin^2 x = \tan^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$  y  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ , lo cual convierte la integral en la de una función racional de la variable  $t$ .

Ejemplo:  $I_{52} = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x}$  es par en  $\sin x$  y  $\cos x \rightarrow \tan x = t \rightarrow$

$$I_{52} = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2} - 4 \frac{t}{1+t^2} + \frac{5}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t^2 - 4t + 5} dt, \text{ que es una integral racional.}$$

**4º caso: en cualquier otro caso, incluso en los anteriores, vale el cambio  $\tan \frac{x}{2} = t$**

$$\text{de donde: } \left\{ \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1 = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \right\}$$

$\sin x = \tan x \cdot \cos x = \frac{2t}{1+t^2}$  y  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ , lo cual convierte la integral en la de una función racional de la variable  $t$ .

Ejemplo:  $I_{53} = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx$ ; no es de ninguno de los tres primeros casos luego

$$\text{haremos } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \rightarrow I_{53} = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2}{t^2 + 2t + 1} dt = \int \frac{2}{(t+1)^2} dt = \frac{-2}{t+1} + C =$$

$$= \frac{-2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

### Notas.-

Conviene no aplicar el cambio del 4º caso, mas que si no se pueden aplicar los anteriores ya que suelen obtenerse integrales más complicadas, por ejemplo, con raíces complejas múltiples en el denominador.

Dependiendo del cambio que se aplique, la solución general puede adoptar distinto aspecto; recordemos que dos primitivas de una función se diferencian en una constante.