

EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PROPUESTOS EN EXÁMENES

1. Sea x el precio unitario de venta de un producto, e y la oferta de dicho producto. Se sabe que la razón a la que cambia la oferta respecto al precio viene dado por la ecuación diferencial: $x(x + 3)dy - y(2x + 3)dx = 0$. Sabiendo que para $x = 2$ el valor de y es **20 unidades**, se pide hallar la oferta en función del precio. (*Septiembre 2002, reserva y enero 2003 res*)

Solución.-

$x(x + 3)dy - y(2x + 3)dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{2x + 3}{x(x + 3)}dx = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 3}\right)dx \Leftrightarrow \ln y = [\ln x + \ln(x + 3)] + \ln C \Leftrightarrow y = Cx(x + 3)$. Sustituyendo la condición dada se obtiene que $C = 2$, luego la oferta en función del precio es $y = 2x(x + 3)$.

2. Señalemos por y , en euros, el **ingreso** que se obtiene al vender x unidades de un producto. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $y' + \frac{x^2}{1 - y^2} = 0$. Obtener y , en función de x , sabiendo que la venta de 1 unidad produce un ingreso de 1 euro. (*Enero 2003*)

Solución:

$y' + \frac{x^2}{1 - y^2} = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)dy = x^2dx$; integrando: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} + C$; puesto que $y(1) = 1 \rightarrow \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} + C \rightarrow C = -1$, luego la solución es: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} - 1 \Leftrightarrow y^3 - 3y - x^3 + 3 = 0$

3. Resolver la ecuación diferencial $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ (*Septiembre 2003*)

Solución.-

Puesto que $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{-1 - (1 + 2xy)}{y(1 + xy)} = \frac{-2}{y}$ depende sólo de y , la ecuación diferencial

posee un factor integrante μ que depende sólo de y . Concretamente:

$$\frac{\frac{d\mu}{dy}}{\mu} = \frac{-2}{y} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{y} dy \Rightarrow \ln \mu = -2 \ln y \Rightarrow \mu = \frac{1}{y^2}$$

luego $\frac{1 + xy}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ es diferencial exacta. Así pues $f(x, y) = -\int \frac{x}{y^2}dy = \frac{x}{y} + C(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{dC(x)}{dx} = \frac{1 + xy}{y} \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = x \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2}$. Luego la solución es:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = k$$

4. Sea y , en euros, el ingreso obtenido por la venta de x unidades de un producto. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)}$. Hállese y en función de x , sabiendo

que la venta de 10 unidades produce unos ingresos de 100 euros. (*Septiembre 2003, reserva*)

Solución.-

Escribimos la ecuación diferencial en la forma: $\frac{1}{y} dy = \frac{(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)} dx$. Integrando:

$$\ln y = \int \frac{(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)} dx = \int \frac{3x - 4}{x^2 - 2x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln kx^2(x-2), \quad \text{de donde}$$

$$y = kx^2(x-2) \int \frac{3x-4}{x^2-2x} dx = . \text{ Si } x = 10 \Rightarrow 100 = k \cdot 100 \cdot 8 \Rightarrow k = \frac{1}{8}, \text{ luego:}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{8} x^2(x-2)}$$

5. Hallar un factor integrante que convierta en exacta la siguiente ecuación diferencial:
 $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$ (Septiembre 2003, reserva)

Solución.-

Puesto que $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = -\frac{4}{y}$ depende sólo de y , existe factor integrante dependiente de y ,

a saber:

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu} = -\frac{4}{y} \Rightarrow \ln \mu = -4 \ln y \Rightarrow \mu = y^{-4}$$

Así pues: $\frac{3x^2 - y^2}{y^4} dy - \frac{2x}{y^3} dx = 0$ será diferencial exacta $\Rightarrow f(x,y) = -\frac{2}{y^3} \int x dx = -\frac{x^2}{y^3} + C(y)$

$$\Rightarrow \frac{3x^2}{y^4} + C'(y) = \frac{3x^2 - y^2}{y^4} \Rightarrow C'(y) = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow C(y) = \frac{1}{y} + C. \text{ La solución general es pues:}$$

$$\boxed{-\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} + C = 0}$$

6. Resolver la ecuación diferencial: $y' + 2xy = xy^2$. (Septiembre 2003, reserva)

Solución.-

$$y' = x(y^2 - 2y) \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 2y} = x dx \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy = x dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{y-2}{y} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y-2}{y} = Ce^{x^2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{1 - Ce^{x^2}}}$$

7. El precio de venta y de un producto, respecto a la cantidad demandada x , cambia con la razón expresada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 24x}{x^2 + 16}$. Obtener el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 7,5 euros/unidad, la cantidad demandada es de 4 unidades. (Septiembre 2004, reserva)

Solución.-

Podemos escribir la ecuación: $(2xy + 24x)dx + (x^2 + 16)dy = 0$, que es diferencial exacta, como puede comprobarse. Así pues: $\int (2xy + 24x)dx = x^2y + 12x^2 + C(y)$. Derivando respecto de y : $x^2 + C'(y) = x^2 + 16 \rightarrow C'(y) = 16 \rightarrow C(y) = 16y + C$. Luego, la solución general:

$$x^2y + 12x^2 + 16y + C = 0 \leftrightarrow y = \frac{-12x^2 - C}{x^2 + 16}. \text{ Sustituyendo los valores dados, se obtiene}$$

$C = -432$. La solución es:

$$y = \frac{-12x^2 + 432}{x^2 + 16}$$

8. Encontrar el factor integrante que convierte la siguiente ecuación diferencial en una ecuación diferencial exacta: $y^3tdy + \frac{1}{2}y^4dt = 0$. (Septiembre 2004, reserva)

Solución.-

La ecuación es de la forma $Pdy + Qdt = 0$, y se cumple que $\frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial t}}{P} = \frac{1}{t}$, que depende sólo de t . Luego hay un factor integrante que depende de t . Será:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{t} \rightarrow \ln \mu = \ln t \rightarrow \mu = t$$

9. La tasa a la que cambia el **precio de venta, y** , de un producto, respecto a su **demanda, x** , viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x^2 + xy)}{x^2 + y^2}$. Calcular el **precio en función de la demanda**, sabiendo que cuando el precio es de 5 euros, la demanda es de 15 unidades. (Feb 2005, 1ª semana)

Solución.-

Escribiendo la ecuación de la forma $2(x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$, podemos comprobar que es diferencial exacta, luego: $\int 2(x^2 + xy)dx = \frac{2}{3}x^3 + x^2y + C(y)$ y derivando respecto a y , se debe cumplir: $x^2 + C'(y) = x^2 + y^2 \rightarrow C'(y) = y^2 \rightarrow C(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$. La

solución general es pues: $\frac{2}{3}x^3 + x^2y + \frac{1}{3}y^3 = C$. Para las condiciones dadas:

$$\frac{2}{3} \cdot 3375 + 225 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 125 = \frac{10250}{3} = C, \text{ de donde la solución: } 2x^3 + 3x^2y + y^3 = 10250$$

10. Un rumor se propaga en una población de 2.500 habitantes a un ritmo proporcional al número de personas que todavía desconocen la noticia. Designemos por p al número de personas que conocen la noticia. Se sabe que cuando ha transcurrido un día, la noticia ya la conocen 500 individuos. Se pide calcular el número de personas que lo saben al cabo de dos días. (Feb 2005, 2ª semana)

Solución.-

Se tendrá que $p' = k(2500 - p) \Leftrightarrow p' + kp = 2500k$, ecuación diferencial lineal cuya solución general es $p = 2500 + C \cdot e^{-kt}$, para $t = 0 \rightarrow p = 0$ y para $t = 1 \rightarrow p = 500$, de donde $C = -2500$ y $k = \ln \frac{5}{4}$, luego $p = 2500 \left(1 - \left(\frac{4}{5} \right)^t \right)$. Si $t = 2 \rightarrow p = 2500 \left(1 - \frac{16}{25} \right) = 900$

11 Sea y , en unidades de 10.000 euros, el **beneficio neto semanal** obtenido por un comerciante cuando invierte x miles de euros en **publicidad**. La tasa a la que cambia el beneficio respecto a

la cantidad empleada en inversión viene dada por la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 4y}$.

Hallar la **expresión que relaciona ambas variables**, sabiendo que cuando se gasta 10.000 euros semanales en publicidad el beneficio es de 200.000 euros.

(Sep. 2005. Or)

Solución.-

Escribimos la ecuación en la forma: $(3x^2 - y)dx + (-x + 4y)dy = 0$, pudiéndose comprobar que es diferencial exacta. Tenemos pues: $f(x, y) = \int (3x^2 - y)dx = x^3 - xy + C(y)$,

de donde $\frac{df}{dy} = -x + C'(y) = -x + 4y \Rightarrow C'(y) = 4y \Rightarrow C(y) = 2y^2 - C$. Por tanto la solución es:

$x^3 - xy + 2y^2 = C$ y puesto que para $x = 10 \rightarrow y = 20$, sustituyendo se obtiene que $C = 1600$, de donde:

$$x^3 - xy + 2y^2 = 1600$$

12. Señalemos por y , en euros, el ingreso que se obtiene al vender x unidades de un producto. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $y' + \frac{x^2}{1 - y^2} = 0$

Obtener y , en función de x , sabiendo que la venta de 1 unidad produce un ingreso de 1 euro. (Sep 2005. Res)

Solución.-

$y' + \frac{x^2}{1 - y^2} = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)dy = x^2 dx$; integrando: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} + C$; puesto que $y(1) = 1 \rightarrow$

$$\frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} + C \rightarrow C = -1, \text{ luego la solución es: } \frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} - 1 \Leftrightarrow y^3 - 3y - x^3 + 3 = 0.$$

13 Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$(3x + 4y + 1)dy + (2x + 3y + 1)dx = 0$$

(Enero 2006. Or)

Solución.-

Puede comprobarse que es una ecuación diferencial exacta. Se tendrá pues:

$$f(x, y) = \int (3x + 4y + 1)dy = 3xy + 2y^2 + y + C(x)$$

Derivando respecto a x , deberá ser:

$$3y + C'(x) = 2x + 3y + 1 \rightarrow C'(x) = 2x + 1 \rightarrow C(x) = x^2 + x + C.$$

Luego la solución es: $3xy + 2y^2 + y + x^2 + x + C = 0$

14. Sea x el número de unidades fabricadas e y el coste de producción. Sabiendo que la tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades producidas viene dado por la siguiente ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - x + \frac{9}{x}$. Se pide calcular el coste en función de las unidades producidas, en el caso en que el coste es de 12 unidades monetarias cuando el número de unidades fabricadas es 3.

(Enero 2006. Or)

Solución.-

Se trata de resolver la ecuación diferencial lineal dada. Busquemos dos funciones u y v tales que $y = u \cdot v$ sea solución: Tendremos:

$$u'v + uv' = \frac{u \cdot v}{x} - x + \frac{9}{x} \Leftrightarrow u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -x + \frac{9}{x} \quad (\text{I}). \text{Elijamos } v \text{ tal que } v' - \frac{v}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{v'}{v} = \frac{1}{x} \rightarrow v = x. \text{ Sustituyendo en (I): } u'x = -x + \frac{9}{x} \Leftrightarrow u' = -1 + \frac{9}{x^2} \Leftrightarrow u = -x - \frac{9}{x} + C. \text{ Así}$$

pues la solución general es $y = -x^2 + Cx - 9$. Para las condiciones dadas: $12 = 3C - 18 \Leftrightarrow C = 10$, luego: $y = -x^2 + 10x - 9$.

15.- Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$xy' + y - y^2 \ln x = 0 \quad (\text{Feb 2006 2ª})$$

Solución.-

Es una ecuación de Bernoulli. Dividiendo los dos miembros por y^2 , queda: $xy^{-2}y' + y^{-1} - \ln x = 0$; hacemos el cambio $y^{-1} = z \rightarrow -y^{-2}y' = z'$ y sustituyendo se obtiene: $-xz' + z - \ln x = 0$, que es una ecuación lineal. Hacemos $z = u \cdot v \rightarrow z' = u'v + uv'$ de donde sustituyendo y sacando factor común u : $-xu'v - u(xv' - v) - \ln x = 0$; haciendo $xv' - v = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow v = x, \text{ y sustituyendo: } -x^2u' - \ln x = 0 \rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} \ln x \rightarrow u = \int \left(-\frac{1}{x^2} \ln x\right) dx = (\text{por}$$

$$\text{partes}) = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Así pues, } z = \ln x + 1 + Cx, \text{ de donde } y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$$

16. Sea x la demanda de un cierto producto e y el precio unitario de venta. Se sabe que el ritmo al que cambia el precio respecto a la demanda, viene expresado por la siguiente

ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x - \frac{120}{x}$. Se pide calcular el precio en función de la

demandas, sabiendo que el precio unitario de venta es de 3 euros cuando la demanda es de 9 unidades.

(Feb 2006 2ª)

Solución.-

La ecuación diferencial es lineal. Mediante el cambio $y = u \cdot v$ se obtiene que $v = x$. Sustituyendo queda:

$$u'x - x + \frac{120}{x^2} = 0 \rightarrow u' = 1 - \frac{120}{x^2} \rightarrow u = x + \frac{120}{x} + C. \text{ Por tanto } y = x^2 + Cx + 120. \text{ Haciendo}$$

$x = 9, y = 3$, se obtiene que $C = -22$. Luego el precio en función de la demanda:

$$y = x^2 - 22x + 120$$

17. Sea y el coste de producir x unidades de un cierto producto. Se sabe que la tasa a la que cambia el coste de producción, respecto al número de unidades fabricadas, es igual al doble del cuadrado del coste menos el cuadrado del número de unidades producidas, dividido todo ello por el producto de ambas variables.

Se pide hallar la relación que existe entre las unidades producidas y el coste de producción. Para ello, se sabe que al producir 1 unidad de producto, el coste de producción es de 3 unidades monetarias.

Solución.- (sep 06)

Planteado el problema conduce a la ecuación diferencial homogénea:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{xy} \text{ con la condición } y(1) = 3$$

Efectuando el cambio de variable $y = ux$ y sustituyendo, queda:

$$\frac{xdu + udx}{dx} = \frac{2u^2x^2 - x^2}{ux^2} = \frac{2u^2 - 1}{u} \rightarrow \frac{u}{u^2 - 1} du = \frac{1}{x} dx \rightarrow (\text{integrando}) \rightarrow \frac{1}{2} \ln|u^2 - 1| = \ln C_1 x$$

$$\rightarrow u^2 - 1 = Cx^2 \rightarrow (\text{deshaciendo el cambio}) \rightarrow y^2 = x^2 + Cx^4 \rightarrow y = \sqrt{x^2 + Cx^4}. \text{ Sustituyendo } x = 1, \text{ se obtiene: } 3 = \sqrt{1 + C} \rightarrow C = 8. \text{ La relación pedida es: } y = \sqrt{x^2 + 8x^4}$$

18. Sea $y = C(x)$ el coste en euros, de fabricar x figuras de cerámica. La tasa a la que cambia el coste respecto al número de figuras fabricadas viene dada por la siguiente

ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} - 2x(y+1) = 0$. Hallar el coste en función del número de

figuras de cerámica fabricadas, sabiendo que el coste de fabricar 2 unidades es de 109 euros.

(Tómese $e^4 = 55$)

Solución.- (sep 06 res)

Escribiendo la ecuación diferencial en la forma $\frac{1}{y+1} dy = 2x dx$ e integrando, queda:

$$\ln|y+1| = x^2 + C_1 \Leftrightarrow y+1 = Ce^{x^2} \Leftrightarrow y = Ce^{x^2} - 1.$$

Para la condición dada: $109 = Ce^4 - 1 \Leftrightarrow C = \frac{110}{e^4} = 2$. El coste pedido es: $y = 2e^{x^2} - 1$

19.- Sea x el precio unitario de venta de un producto, e y su oferta. La razón a la que cambia la oferta respecto al precio, viene dada por la siguiente ecuación diferencial :

$\frac{dy}{dx} = 4x + 2y$. Hallar la oferta en función del precio, sabiendo que si el precio unitario es de

1,5 euros, la demanda es de 56 unidades. (Nota : Tómese $e^3 = 20$) (En. 07)

Solución.-

Podemos integrar la ecuación diferencial, por ejemplo, como homogénea. Hacemos el cambio $y = u \cdot v$. Sustituyendo:

$$u'v + uv' = 4x + 2uv \Leftrightarrow u(v' - 2v) = 4x - u'v \quad (\text{I}). \text{ Hacemos } v' - 2v = 0 \Leftrightarrow \frac{v'}{v} = 2.$$

Integrando: $\ln|v| = 2x \rightarrow v = e^{2x}$. Sustituyendo en (I) queda: $4x - u'e^{2x} = 0 \Leftrightarrow u' = 4xe^{-2x}$.

Integrando (por partes):

$$u = -2xe^{-2x} + \int 2e^{-2x} dx = -2xe^{-2x} - e^{-2x} + C.$$

Así pues $y = e^{2x}(-2xe^{-2x} - e^{-2x} + C) = -2x - 1 + Ce^{2x}$.

Para las condiciones dadas: $56 = -3 - 1 + C \cdot e^3 = -4 + 20C \Leftrightarrow C = 3$

Luego la oferta en función del precio es: $y = -2x - 1 + 3 \cdot e^{2x}$.