

## **EJERCICIOS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS PROPUESTOS EN EXÁMENES**

**1.-**

En las ecuaciones lineales en diferencias, tenemos el modelo de la telaraña, que se refiere a la versión discreta del modelo de ajuste del precio de un bien en el mercado. En base a ello y haciendo uso de los siguientes datos para el modelo de la telaraña:

$$\begin{aligned} D_t &= 5 - 3P_t \\ S_t &= -2 + P_{t-1} \end{aligned} \quad \text{siendo } P_0 = 4$$

- Se pide calcular:
- 1) La trayectoria temporal del **precio**
  - 2) La tendencia del precio **a largo plazo**
  - 3) La **representación gráfica** de la solución del modelo

(En. 2005)

**Solución.-**

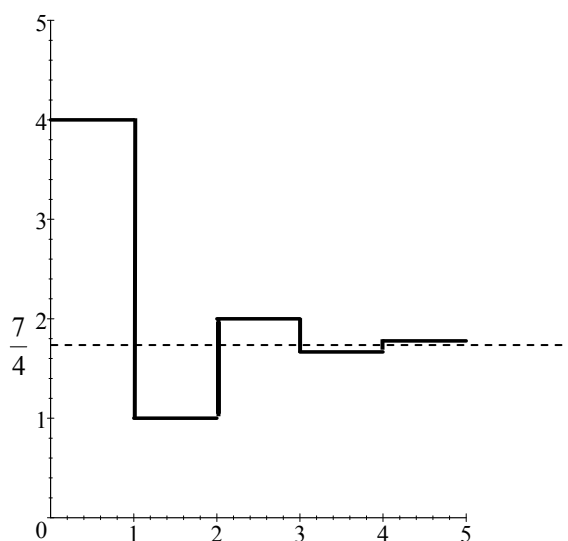
1) Igualando las expresiones de la oferta y de la demanda, se obtiene la ecuación en diferencias:  $3P_t + P_{t-1} = 7$ . La ecuación característica de la ecuación homogénea es  $3\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$ , luego la solución general de la ecuación homogénea es  $P_t = C\left(-\frac{1}{3}\right)^t$ ; por otra parte, una solución particular de la ecuación completa se obtiene haciendo  $P_t = A \rightarrow 3A + A = 7 \rightarrow A = \frac{7}{4}$ . Luego la solución general de la ecuación completa es

$P_t = C\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{7}{4}$ . Para  $t = 0$ , se obtiene  $4 = C + \frac{7}{4} \rightarrow C = \frac{9}{4}$  de donde la trayectoria temporal

del precio es  $P_t = \frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^t + \frac{7}{4}$ .

2) Haciendo que  $t \rightarrow \infty$ , se obtiene que  $P_t \rightarrow \frac{7}{4}$

3)



**2.-**

En las ecuaciones lineales **en diferencias**, tenemos el modelo de la telaraña, que se refiere a la versión discreta del modelo de ajuste del precio de un bien en el mercado. En base a ello y haciendo uso de las siguientes ecuaciones para el **modelo de la telaraña**:

$$D_t = 100 - 2P_t$$

$$S_t = -20 + 3P_{t-1}$$

- Se pide calcular
- 1) El valor de equilibrio del precio
  - 2) Comprobar si es estable o inestable
  - 3) Suponiendo que el valor inicial del precio es  $P_0 = 25$ , calcular los valores numéricos de  $p_t$  hasta  $t = 4$ .

(Sep 05)

1) Igualando las expresiones de la oferta y de la demanda, se obtiene la ecuación en diferencias:  $2P_t + 3P_{t-1} = 120$ . La ecuación característica de la ecuación homogénea es  $2\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$ , luego la solución general de la ecuación homogénea es  $P_t = C\left(-\frac{3}{2}\right)^t$ ; por otra parte, una solución particular de la ecuación completa se obtiene haciendo  $P_t = A \rightarrow 2A + 3A = 120 \rightarrow A = 24$ . Luego la solución general de la ecuación completa es  $P_t = C\left(-\frac{3}{2}\right)^t + 24$ , que es el valor de equilibrio del precio.

2) Puesto que  $\left|-\frac{3}{2}\right| > 1$ , el precio es inestable

3) Para  $t = 0$ , se obtiene  $25 = k + 24$  de donde la trayectoria temporal del precio es  $P_t = \left(-\frac{3}{2}\right)^t + 24$ . Se tiene entonces:  $P(1) = 22,5$ ;  $P(2) = 26,25$ ;  $P(3) = 20,625$ ;  $P(4) = 29,0625$

**3.-**

**Resolver la siguiente ecuación lineal en diferencias:**

$$y_{x+3} + 3y_{x+2} + 3y_{x+1} + y_x = 6^x$$

(Sep 06)

**Solución.-**

El polinomio característico  $t^3 + 3t^2 + 3t + 1$  tiene la raíz  $t = -1$ , triple, luego la solución general de la ecuación homogénea es  $y_1(x) = C_1(-1)^x + C_2x(-1)^x + C_3x^2(-1)^x$ .

Para buscar una solución particular de la ecuación completa, ensayaremos una solución de la forma  $y_2(x) = k \cdot 6^x$ . Se cumplirá pues:

$$216k6^x + 108k6^x + 18k6^x + k6^x = 6^x \Leftrightarrow k = \frac{1}{343}$$

La solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y_x = y_1(x) + y_2(x) = C_1(-1)^x + C_2x(-1)^x + C_3x^2(-1)^x + \frac{6^x}{343}$$

4.-

Resolver la siguiente ecuación lineal en diferencias:

$$y_{x+3} - y_x = 0$$

Asimismo, obtener de las soluciones obtenidas las que son convergentes si  $x \rightarrow +\infty$

(Sep 06 res)

**Solución.-**

El polinomio característico  $t^3 - 1$  tiene las raíces  $1, \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$ .

La solución general es, por tanto:  $y_x = C_1 + C_2 \cos \frac{2\pi}{3} x + C_3 \sin \frac{2\pi}{3} x$ .

Las únicas soluciones convergentes se obtienen cuando  $C_2 = C_3 = 0$

5.- Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + 2y_x = x$$

con las condiciones iniciales:  $y_0 = 1, y_2 = 0$  (En.-07-or)

**Solución.-**

La ecuación característica  $r^2 - 2r + 2 = 0$  tiene las soluciones  $r_1 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

y  $r_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ . Por tanto la solución general de la ecuación homogénea será:

$$(\sqrt{2})^x \left( c_1 \cos \frac{\pi x}{4} + c_2 \sin \frac{\pi x}{4} \right)$$

Una solución particular de la completa será de la forma  $k_1 + k_2 x$ . Sustituyendo en la ecuación dada:

$$k_1 + k_2(x+2) - 2[k_1 + k_2(x+1)] + 2(k_1 + k_2 x) = x$$

Identificando coeficientes se obtiene que  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 1$ . Así pues la solución general de la ecuación dada será:

$$y_x = (\sqrt{2})^x \left( c_1 \cos \frac{\pi x}{4} + c_2 \sin \frac{\pi x}{4} \right) + x$$

Para las condiciones iniciales dadas se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ (\sqrt{2})^2 \left( c_1 \cos \frac{2\pi}{4} + c_2 \sin \frac{2\pi}{4} \right) + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{array} \right\}$$

Así pues la solución que se pide es:

$$y_x = (\sqrt{2})^x \left( \cos \frac{\pi x}{4} - \sin \frac{\pi x}{4} \right) + x$$

**6.- (Enero 2007. 2ª)**

Dada la expresión  $y_x = c_1 + c_2 2^x + c_3 x 2^x$ .

Se pide: Obtener la ecuación en diferencias finitas, lineal homogénea, de la cual la expresión dada es solución.

**Solución.-**

De acuerdo con la forma de la solución general dada, las raíces del polinomio característico deben  $r_1 = 1$  y  $r_2 = 2$  (doble), es decir el polinomio característico sería  $(r - 1)(r - 2)^2 = r^3 - 5r^2 + 8r - 4$ , de donde la ecuación sería:

$$y_{x+3} - 5y_{x+2} + 8y_{x+1} - 4y_x = 0$$

**7.- (Feb 2008. 2ª)**

Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:  $y_{x+2} + 2y_{x+1} + 2y_x = 0$

**Solución.-**

La ecuación característica  $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$  tiene las soluciones  $\lambda = -1 \pm i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} \pm i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ . Luego la solución de la ecuación en diferencias:

$$y_x = (\sqrt{2})^x \left( C_1 \cos \frac{3\pi x}{4} + C_2 \sin \frac{3\pi x}{4} \right)$$