

EJERCICIOS DE INTEGRAL DEFINIDA PROPUESTOS EN EXÁMENES

1.- Toda función f continua en $[a, b]$ es integrable. Pero ¿todas las funciones integrables son continuas?. Exprese las implicaciones que fijan, en doble sentido, los conceptos de derivabilidad, continuidad e integrabilidad. (*Enero 2001. Ex. Res.*)

Solución:

Para que una función sea integrable (Riemann) no es necesario que sea continua. Por ejemplo, la función $f(x) = [x]$, (parte entera de x) no es continua en el intervalo $[0, 2]$ y sin embargo es integrable: $\int_0^2 [x] dx = \int_0^1 [x] dx + \int_1^2 [x] dx = 0 + 1 = 1$.

Se tienen las siguientes implicaciones:

$$f \text{ derivable} \Rightarrow f \text{ continua} \Rightarrow f \text{ integrable}$$

2.- ¿Cuándo puede afirmarse que una integral impropia de segunda especie de una función f en un intervalo $[a, b)$ es divergente? (*Enero 2001. Ex. Res.*)

Solución:

La integral impropia de segunda especie $\int_a^b f(x) dx$ es divergente si no existe o es infinito el límite $\lim_{u \rightarrow b} \int_a^u f(x) dx$

3.- Un almacenista adquiere 10.000 kilos de patatas, que puede ir vendiendo a razón de 2500 kilos por semana. Si el coste del almacenaje es de 2 pesetas/kilo y semana, ¿cuánto tendrá que pagar por el almacenaje?

Solución:

La función que expresa el coste del almacenaje cuando hayan pasado x semanas es

$$f(x) = 2(10000 - 2500x), \quad x \in [0, 4]$$

luego se han de pagar $\int_0^4 2(10000 - 2500x) dx = [20000 - 2500x^2]_0^4 = 40000$ pts.

4. Un concesionario de coches adquiere 105 coches, que puede ir vendiendo a razón de 7 coches por semana. Si el coste de almacenaje es de **50 euros/coche y semana**, ¿cuánto tendrá que pagar por el almacenaje? (*Septiembre 2002. Ex. Or.*)

Solución.-

$$\text{Coste de almacenaje} = \int_0^{15} 50(105 - 7x) dx = 50 \left[105x - \frac{7x^2}{2} \right]_0^{15} = 39375 \text{ €}.$$

5. Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia: $I = \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^8} dx$

(*Septiembre 2002. Ex. Res.*)

Solución.-

Cambio $\ln x = t$, de donde $x = 2 \rightarrow t = \ln 2$, $x = \infty \rightarrow t = \infty$ y $\frac{dx}{x} = dt \Rightarrow I =$

$$= \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^8} dt = -\frac{1}{7} \left[\frac{1}{t^7} \right]_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{7(\ln 2)^7}.$$

6. Se sabe que t horas después de la medianoche, la temperatura en el mes de septiembre de una región de Galicia es de $f(t) = 10 + 4t - \frac{3}{10}t^2$. Calcular cual es la temperatura media en dicha región entre las 9:00 AM y el mediodía. (Septiembre 2004, ex. res)

Solución.-

$$TM = \frac{1}{12-9} \int_9^{12} \left(10 + 4t - \frac{3}{10}t^2 \right) dt = \frac{1}{3} \left[10t + 2t^2 - \frac{1}{10}t^3 \right]_9^{12} = 18,7^\circ\text{C}$$

7. Un pozo de petróleo produce 1.000 barriles de crudo al mes. La compañía propietaria estima que se agotará al cabo de 5 años. El precio del crudo es actualmente, de 40 dólares el barril, y se espera que aumente de forma constante, a razón de 0,05 dólares por barril y mes. ¿Cuales serán los ingresos que tendrá la compañía propietaria del pozo, suponiendo que el crudo se vende conforme se extrae? (febrero 2005 2ª semana)

Solución.-

En dt meses se producirán $100 \cdot dt$ barriles. El precio del barril cuando hayan pasado t meses será $40 + 0,05t$. Luego los ingresos serán:

$$\int_0^{60} (40 + 0,05t) 1000 \cdot dt = [40000t + 25t^2]_0^{60} = 2.490.000 \text{ dólares.}$$

8.- (Sep 2005)

Una plaza de toros abre sus puertas a las 13 horas. Los aficionados entran en ella a razón de: $-8(t+1)^3 + 108(t+1)^2$ aficionados por hora, t horas después de la apertura de la plaza. ¿Cuántos aficionados entrarán entre las 15 horas y las 17 horas, que es la hora de comienzo de la corrida?.

Solución.-

La respuesta la proporciona la integral:

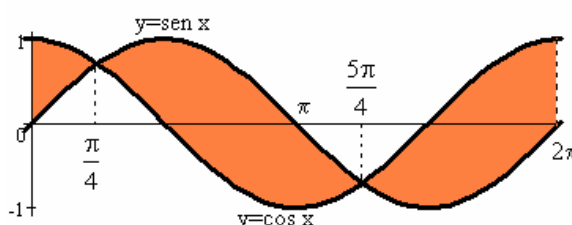
$$\int_2^4 [-8(t+1)^3 + 108(t+1)^2] dt = 2440$$

9.-. Calcular el área de la figura delimitada entre las funciones $y = \sin x$ e $y = \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ (En. 2006)

Solución.-

Las funciones dadas se cortan para los valores de $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$ y de la figura se puede deducir que el área pedida es el doble que la comprendida entre esos valores. Así pues:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = -2[\cos x + \sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \\ &= 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$



27.- (Feb 2006)

Calcular el área de la figura limitada por la curva $y = \ln x$, el eje OX , y la recta $x = e$

Solución.-

$y = \ln x$ corta al eje OX en $x = 1$, luego la integral es:

$$\int_1^e \ln x dx = (\text{por partes}) = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - e + 1 = 1.$$

10.- (Feb 2006)

Después de x horas en el trabajo, un obrero puede producir $200xe^{-0,5x}$ unidades por hora. Sabiendo que el obrero entra a trabajar a las ocho de la mañana, se pregunta ¿cuántas unidades producirá entre las 10 de la mañana y el mediodía?.

Nota: Tómese $e^{-1} = 0,37$ y $e^{-2} = 0,135$.

Solución.-

$$\begin{aligned} \int_2^4 200xe^{-\frac{1}{2}x} dx &= (\text{por partes}) = 200 \left(\left[-2xe^{-\frac{1}{2}x} \right]_2^4 + 2 \int_2^4 e^{-\frac{1}{2}x} dx \right) = \\ 200 \left(-8e^{-2} + 4e^{-1} - 4 \left[e^{-\frac{1}{2}x} \right]_2^4 \right) &= 200(-12e^{-2} + 8e^{-1}) = (\text{con los datos dados}) = 268. \end{aligned}$$

11.- (Sep 2006)

Calcular el valor de la siguiente integral: $B = \int_{\pi}^{\pi} \frac{dx}{\cos x}$

Solución.-

Trivialmente $B = 0$.

12.- (Sep 2006)

Una máquina cosechadora de trigo cuando tiene x meses de vida, genera ingresos a una tasa de: $R(x) = 8000 - 30x^2$ euros mensuales. Asimismo, unos costes a una tasa también mensual, de $T(x) = 2000 + 30x^2$ euros. Se pregunta: ¿Durante cuantos meses será rentable el uso de la máquina?. ¿Cuáles serán las ganancias totales generadas en esos meses?

Solución.-

Dejará de ser rentable cuando $8000 - 30x^2 < 2000 + 30x^2 \Leftrightarrow 60x^2 > 6000 \Leftrightarrow x > 10$ meses.

Las ganancias totales serían:

$$\int_0^{10} (8000 - 30x^2 - 2000 - 30x^2) dx = \int_0^{10} (6000 - 60x^2) dx = [6000x - 20x^3]_0^{10} = 40000 \text{ €}.$$

13.- (Sep 2006 Res)

Calcular la siguiente integral: $A = \int_0^{\pi/2} \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

Solución.-

Aplicamos la fórmula trigonométrica: $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$, luego

$$\text{queda: } A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin 2x + \sin x) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 2x}{2} - \cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

14.- (Sep 2006 Res)

El coste marginal de enlatar un cierto tipo de mejillones está dado por : $200 - 30\sqrt{x}$, siendo x el número de latas expresado en miles, y el coste en euros. ¿Cuál será el aumento total en el coste de la producción, si ésta aumenta de 4.000 a 25.000 latas?.

Solución.-

$$\int_4^{25} (200 - 30\sqrt{x}) dx = \left[200x - 20x^{\frac{3}{2}} \right]_4^{25} = 1860 \text{ €}.$$

35.- Calcular el área correspondiente al siguiente recinto:
 $y \leq 3x^2 - 6x + 8$, $y \geq -2x^2 + 4x + 1$, $x \geq 0$, $x \leq 2$. (En 2007)

Solución.-

El recinto está representado en la figura. Su área es:

$$\begin{aligned} \int_0^2 [(3x^2 - 6x + 8) - (-2x^2 + 4x + 1)] dx &= \int_0^2 (5x^2 - 10x + 7) dx = \\ &= \left[\frac{5x^3}{3} - 5x^2 + 7x \right]_0^2 = \frac{22}{3} \end{aligned}$$

