

EJERCICIOS DE INTEGRALES EULERIANAS PROPUESTOS EN EXÁMENES

1.- Razone y obtenga que la integral euleriana $\Gamma(p)$ (gamma de p), para $p = \frac{1}{2}$ vale $\sqrt{\pi}$, es decir $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. (Enero y Sep. 2001. Ex. Or.)

$$\begin{aligned} \text{Solución: } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio } x = t^2 \\ dx = 2t dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \infty \rightarrow t = \infty \end{array} \right\} = 2 \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 4 \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy = \left\{ \begin{array}{l} \text{cambio a polares:} \\ x = \rho \cos \theta; y = \rho \sin \theta \\ 0 \leq \rho \leq \infty; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{Jacobiano} = \rho \end{array} \right\} = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

2.- Razone y obtenga que para $p > 1$, la integral euleriana $\Gamma(p)$ (gamma de p) cumple que: $\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1)$ (Enero 2001. Ex. Res.)

Solución:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = (\text{por partes}) = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-x^{p-1} e^{-x} \right]_0^u + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx = (p-1) \Gamma(p-1)$$

3.- Resolver la siguiente integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$ (Septiembre 2001. Ex. Or.)

$$\begin{aligned} \text{Solución.-} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{1}{2} \beta\left(2, \frac{3}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(2 + \frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{7}{4} \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{8}{21}. \end{aligned}$$

4.- Si p es un número real mayor que uno, demostrar que $\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1)$. Demostrar también que $\Gamma(1) = 1$, y deducir finalmente que si n es un número natural, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$ (En. 2002, Ex. Or., En. 2003, ex. or. y Sep 05 Res)

Solución:

Ver ejercicio 2.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^u = 1.$$

La fórmula $\Gamma(n) = (n-1)!$ la veremos por inducción. Para $n = 1 \rightarrow \Gamma(1) = 1 = 0!$; supongamos que es cierta para $n-1$: $\Gamma(n-1) = (n-2)!$; entonces $\Gamma(n) = (n-1) \Gamma(n-1) = (n-1) \cdot (n-2)! = (n-1)!$.

5.- Estudiar si la Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t+1|} dt$ es convergente. En caso afirmativo hallar su valor. (En. 2002, Ex. Or.)

Solución.- $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t+1|} dt = \int_{-\infty}^{-1} e^{t+1} dt + \int_{-1}^{+\infty} e^{-t-1} dt =$ (en la primera integral hacemos el cambio $t+1 = -u$ y en la segunda integral $t+1 = u$) $= \int_0^{\infty} e^{-u} du + \int_0^{\infty} e^{-u} du = 2\Gamma(1)$. Lo cual demuestra que la integral es convergente y su valor es $2\Gamma(1) = 2$.

6.- Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia: $A = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$ (En. 2002, Ex. Res.)

Solución.-

$A = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx =$ (cambio $\frac{x}{2} = t$) $= 2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 2\Gamma(1)$. Lo cual demuestra que la integral es convergente y su valor es $2\Gamma(1) = 2$.

7.- Obtenga el valor de la siguiente integral: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx$ (Septiembre 2002. Ex. Or.)

Solución.-

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^0 x dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta\left(\frac{9}{2}\right) \beta\left(\frac{1}{2}\right)}{\beta(5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4!} =$$

$$= \frac{35}{256} \pi.$$

8. Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia: $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x} dx$. (Septiembre 2002. Ex. Or.)

Solución.-

Cambio $e^x = t \Rightarrow I = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \Gamma(1)$. Lo cual demuestra que la integral es convergente y su valor es $\Gamma(1) = 1$.

9.- Obtenga el valor de la siguiente integral euleriana: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{\sin x} dx$ (Septiembre 2002. Ex. Res.)

Solución.-

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{\sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x dx = \beta\left(\frac{5}{4}, 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\frac{5}{4} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{4}{5}$$

10. Calcular el valor de la integral euleriana $\beta(p, q)$ para los valores $p = \frac{5}{2}$, $q = \frac{7}{2}$ (Enero 2003, ex. res)

Solución:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{\frac{45}{32} \pi}{5!} = \frac{3}{256} \pi$$

11. Calcular mediante las integrales eulerianas el valor de $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$ (Septiembre

2003, ex. res)

Solución.-

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

12. Calcular el valor de la integral: $\int_0^1 (Lx)^{2n} dx$ (siendo L el logaritmo neperiano)

(Septiembre 2003, ex. res)

Solución.-

Efectuamos el cambio $x = e^{-t}$ y la integral queda: $\int_0^{\infty} (-t)^{2n} e^{-t} dt =$
 $= (-1)^{2n} \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-t} dt = (-1)^{2n} \Gamma(2n+1)$. Si n es entero no negativo este resultado es
 $= \Gamma(2n+1) = (2n)!$

13. Calcular la integral $I = \int_0^1 x^a (\ln x)^b dx$, mediante el cambio: $\ln x = -\frac{t}{a+1}$, siendo b un número natural. (Septiembre 2004, ex. res)

Solución.-

Según el valor de a, pueden darse varios casos:

- caso $a > -1$: entonces, si $x = 0 \rightarrow t = +\infty$ y si $x = 1 \rightarrow t = 0$. La integral queda:

$$I = - \int_{+\infty}^0 e^{-\frac{at}{a+1}} \left(\frac{-t}{a+1}\right)^b \frac{1}{a+1} e^{-\frac{t}{a+1}} dt = - \left(\frac{-1}{a+1}\right)^{b+1} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^b dt = \left(\frac{-1}{a+1}\right)^{b+1} \Gamma(b+1) = \frac{(-1)^b \cdot b!}{(a+1)^{b+1}}$$

- caso $a < -1$: entonces, si $x = 0 \rightarrow t = -\infty$ y si $x = 1 \rightarrow t = 0$. La integral queda:

$$I = - \left(\frac{1}{a+1}\right)^{b+1} \int_{-\infty}^0 e^{-t} (-t)^b dt = - \left(\frac{1}{a+1}\right)^{b+1} \int_0^{+\infty} e^t t^b dt, \text{ y esta integral es divergente.}$$

14. Calcular el valor de la siguiente integral euleriana: $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}}} dx$ (febrero 2005

2ª semana)

Solución.-

$$B = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}} x \cdot \cos^{\frac{1}{2}} x \cdot dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = (\text{fórmula de los complementos}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

15. Calcular el valor de la siguiente integral euleriana: $B = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^3} dx$ (enero 2005)

Solución.-

El cambio de variable $x = \sqrt[3]{t} \rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \rightarrow B = \frac{1}{3} \int_0^1 t \sqrt{1-t} \cdot t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{\frac{1}{3}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt =$

$$= \frac{1}{3} \beta\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} = \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{11}{6} \cdot \frac{5}{6} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{55 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$

16.- (Sep 2006)

Calcular el valor de la siguiente integral: $A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

Solución.-

Se convierte en una integral euleriana mediante el cambio $x^3 = t \rightarrow x = t^{\frac{1}{3}} \rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \rightarrow A = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{3} \beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) =$ (usando la fórmula de los complementos)

$$= \frac{1}{3} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

17.- Resolver la siguiente integral: $I = \int_0^\infty \sqrt{x} \cdot e^{-x^3} dx$ (En. 2007)

Solución.-

Hacemos el cambio de variable $x^3 = t \leftrightarrow x = t^{\frac{1}{3}} \rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$. La integral queda:

$$I = I = \frac{1}{3} \int_0^\infty t^{\frac{1}{6}} \cdot e^{-t} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$