

EJERCICIOS DE INTEGRAL INDEFINIDA PROPUESTOS EN EXÁMENES

1.- Razone conceptualmente cuándo tiene sentido aplicar la fórmula de integración por partes que nos permita calcular una integral $\int u \cdot dv$. (Enero 2001. Ex. or)

Solución.- Tiene sentido aplicar la fórmula de integración por partes:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

cuando haya que calcular la integral de un producto de funciones $\int f(x) \cdot g'(x) dx$ de manera que se conozca una primitiva de alguno de los factores [en este caso $g(x)$ será una primitiva de $g'(x)$], pero que sepa calcularse la integral que aparece en el segundo miembro, $\int f'(x) \cdot g(x) dx$.

2.- Calcule la siguiente integral racional: $\int \frac{5x^3 + 5x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$ (Enero 2001. Ex. or)

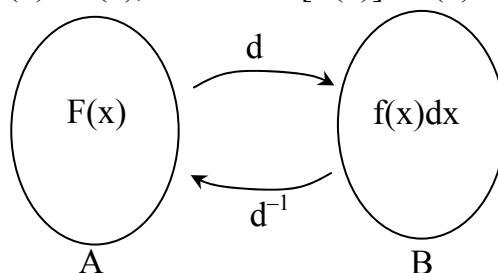
Solución.-

$$\int \frac{5x^3 + 5x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = 5 \int \frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \frac{5}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

3.- Dada una función definida en un intervalo I, razone en qué consiste la integral indefinida de $f(x)$ en I. Expréselo además formalmente. (Enero 2001. Ex. res)

Solución.-

Sea A el conjunto de todas las funciones cuya derivada esté definida en el intervalo I; sea B el conjunto de todas las diferenciales de las funciones de A. Sea **d** la aplicación que a cada función de A le hace corresponder su diferencial en B: por ejemplo, si $F(x) \in A$ es una primitiva de $f(x)$, es decir $F'(x) = f(x)$, entonces $d[F(x)] = f(x)dx$



Llamamos integral indefinida a d^{-1} , correspondencia inversa de d , que representamos por el símbolo \int . La correspondencia \int no es aplicación por que $f(x)$ no admite una única primitiva $F(x)$. Pero, de acuerdo con el teorema fundamental del cálculo integral, si $F(x)$ y $G(x)$ son dos primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) - G(x) = \text{constante}$, por lo que cualquier primitiva de $f(x)$ será de la forma $F(x) + C$, siendo C una constante. Esta expresión nos sirve para expresar el conjunto de todas las primitivas de $f(x)$. Así pues, escribiremos:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

4.- Resolver la siguiente integral: $\int (tg^3 x - 2tgx + 3) \frac{dx}{\cos^2 x}$. (Enero 2002. Ex. res)

Solución.- Es inmediata: $\int (tg^3 x - 2tgx + 3) \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{4} tg^4 x - tg^2 x + 3tgx + C$.

5.- Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ (Enero 2003. Ex. or y Sep 2005, res)

Solución:

$$\text{Hacemos el cambio } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow A = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{2+2t} dt = \ln |1+t| + C =$$

$$= \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

6.- Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ (Enero 2003, ex. res)

Solución.-

$$\text{Es inmediata poniendo } \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

$$(\text{Puede también hacerse el cambio } \operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \Rightarrow A = \int \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C)$$

7. Obtener la solución de la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{3x+3}{x^2+2x+2} dx$. (Febrero 2005, 2ª)

Solución:

$$A = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = (\text{inmediata}) = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+2) + C$$

8. Obtener la solución de la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{dx}{x^2-2x+2}$ (Enero 2005, 1ª)

Solución.-

$$A = \int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = (\text{inmediata}) = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x-1) + C.$$

9.- Obtener la solución de la siguiente integral indefinida: $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}}$ (Septiembre 2005, 1ª)

Solución.-

Multiplicando numerador y denominador del integrando por $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}$, la integral queda: $\int \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}}{6} dx = (\text{inmediata}) = \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x-3)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

10.- Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \sqrt{3x^4 - 2x^2} dx$ (En 2006 or)

Solución.-

$$A = \int x(3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{6} \int 6x(3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} dx = (\text{inmediata}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(3x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{(3x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$$

11.- Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int 2x^2(7 - 3x^3)^{12} dx$ (Feb 2006 2ª)

Solución.-

$$A = -\frac{2}{9} \int -9x^2(7 - 3x^3)^{12} dx = (\text{inmediata}) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{(7 - 3x^3)^{13}}{13} + C.$$

12.- Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

(Sep 08, res)

Solución.-

Hacemos el cambio $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow A = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{2+2t} dt = \ln |1+t| + C =$

$$= \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$