



## EJERCICIOS DE SERIES NUMÉRICAS PROPUESTOS EN EXÁMENES

1.- Estudie el carácter de la serie numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ . (Febrero 2002, ex. or.)

**Solución.-** Puesto que  $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  y la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  es divergente, la serie propuesta será divergente.

2.- Estudiar el carácter de  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n}$ . (Febrero 2002, ex. res.)

**Solución.-**  $2^{\ln n} < e^{\ln n} = n \Rightarrow \frac{1}{2^{\ln n}} \geq \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , luego la serie propuesta diverge.

3.- Utilizando el criterio de D'Alembert, demostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)$  es divergente. (Septiembre 2002, ex. or.)

**Solución.-**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$ , luego por el criterio de

D'Alembert, la serie dada es divergente.

4.- Utilizando el criterio de D'Alembert, demostrar que  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)$  es convergente.

(Septiembre 2002, ex. res.)

**Solución.-**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$  luego por el criterio de

D'Alembert, la serie dada es convergente.

5.- Demuestre si es **convergente o no** la siguiente **serie numérica**:  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$  (Enero

2003, ex. or.)

**Solución.-**

Por el criterio de D'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-(n+1)^2}}{e^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-n^2}}{ne^{-(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) \cdot \frac{1}{e} = 0 < 1$$

luego la serie es convergente.



6.- Demuestre si es **convergente o no** la siguiente **serie numérica**:  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$

(Enero 2003, ex. res)

**Solución.-**

Es divergente ya que no cumple la condición necesaria de convergencia. En efecto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = 1 \neq 0$$

7. Estudiar el carácter de la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$  (Septiembre 2003, ex. res)

**Solución.-**

Aplicamos el criterio de Cauchy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 1 - 1 = 0 < 1$  luego la serie es convergente.

8. Estudiar el carácter de la siguiente serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{na^n}$ ,  $a > 0$ . (Septiembre 2004, ex. res)

**Solución.-**

Aplicamos el criterio de D'Alembert:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + 1}{n^2 + 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[ (n+1)^2 + 1 ] n}{a(n+1)(n^2 + 1)} = \frac{1}{a}$ .

Hay tres casos:

- si  $0 < a < 1 \rightarrow$  DIVERGENTE

- si  $a > 1 \rightarrow$  CONVERGENTE

- si  $a = 1 \rightarrow$  DIVERGENTE, por que el término general  $\frac{n^2 + 1}{n} \rightarrow \infty$ .

9. Determinar el carácter de la siguiente **serie**:  $\frac{3}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \frac{3}{2^7} + \frac{3}{2^9} + \dots$  (Febrero 2005, 1ª semana)

**Solución.-**

Se trata de la serie geométrica de término general  $a_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ . Como  $r = \frac{1}{4} < 1$ , la

serie es convergente. Su suma vale  $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{1-1/4} = 2$

10. ¿ Es convergente la siguiente serie:  $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots$ ?. Calcule su suma (Febrero 2005, 2ª semana)



### Solución.-

Es una serie geométrica de razón  $r = \frac{2}{3} < 1$ , luego es convergente. Su suma

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2/3}{1-2/3} = 2.$$

11.- Estudie el carácter de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{L_n}$  (siendo  $L =$  logaritmo neperiano)

(Septiembre 2005, ex.or)

### Solución.-

(Nota: para que exista la serie, debe considerarse el sumatorio desde  $n = 2$ )

Como  $\frac{1}{L_n} > \frac{1}{n}$  y la serie armónica  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  es divergente, entonces la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{L_n}$  es

divergente.

12. Demuestre si es convergente o no la siguiente serie numérica:  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$  (Septiembre 2005, ex. res)

### Respuesta.-

Para  $n \geq 2$  se tiene que  $n e^{-n^2} = \frac{n}{e^{n^2}} \leq \frac{n}{e^{2n}} < \frac{1}{e^n}$ , y como la serie geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$  es

convergente, la serie dada también lo será.

(Resultado análogo se puede obtener por el criterio logarítmico o por el de D'Alembert)

13.- Estudiar el carácter de la siguiente serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$  (Febrero 2006, 1ª semana)

### Solución.-

Por ejemplo, por el criterio logarítmico:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{a_n}\right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{e^{n^2}}{n}\right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{n^2} - \ln n}{\ln n} =$   
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \ln n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{\ln n} - 1 \right) = \infty > 1 \rightarrow$  la serie es **convergente**.

14.- Estudiar el carácter de la siguiente serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$  (Febrero 2006, 2ª semana)

### Solución.-

Por el criterio de d'Alembert,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n!}{(n+1)^n} : \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1$ ,

luego la serie es convergente.

15.- Estudiar el carácter de la siguiente serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4n}$  (Septiembre 2006, or.)

### Solución.-



Por el criterio de D'Alembert:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4n \cdot 4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow$  la serie es convergente.

16.- Estudiar el carácter de la serie:  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$  (Septiembre 2006, res.)

### Solución.-

Aplicamos el criterio de Cauchy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 1 - 1 = 0 < 1$  luego la serie es convergente.