

EJERCICIOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES PROPUESTOS EN EXÁMENES

1º) Obtener la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$y'_1 = 3y_1 - y_2 + y_3$$

$$y'_2 = -y_1 + 5y_2 - y_3$$

$$y'_3 = y_1 - y_2 + 3y_3$$

(Enero 2002. Ex. Or.)

Solución:

Se obtiene la ecuación característica $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$ que tiene por raíces $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$ cuyos vectores propios asociados son, respectivamente: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así

pues, la solución general del sistema es:

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}$$

$$y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}$$

$$y_3 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}$$

2º) Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, obtener la solución general del mismo:

$$y'_1 = y_1$$

$$y'_2 = y_1 + 3y_2$$

$$y'_3 = y_2 + y_3$$

(Septiembre 2002. Ex. Or.)

Solución.-

Ecuación característica: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2$.

Para $\lambda = 1$, el espacio de autovectores es la recta $x_1 = x_2 = 0$, luego no podemos obtener dos autovectores linealmente independientes, es decir, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

Construiremos pues las soluciones:

para $\lambda = 1$: $z_1 = \begin{pmatrix} (c_1 x + c_2) e^x \\ (c_3 x + c_4) e^x \\ (c_5 x + c_6) e^x \end{pmatrix}$; para $\lambda = 3$: $z_2 = \begin{pmatrix} c_7 e^{3x} \\ c_8 e^{3x} \\ c_9 e^{3x} \end{pmatrix}$

Sustituyendo en el sistema, se obtiene: $z_1 = \begin{pmatrix} -2c_5 e^x \\ c_5 e^x \\ (c_5 x + c_6) e^x \end{pmatrix}$ y $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c_9 e^{3x} \\ c_9 e^{3x} \end{pmatrix}$.

Renumerando las constantes, obtenemos la solución general:

$$z = z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} -2C_1 e^x \\ 2C_3 e^{3x} + C_1 e^x \\ C_3 e^{3x} + (C_1 x + C_2) e^x \end{pmatrix}$$

3º) Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, obtener la solución general del mismo:

$$y'_1 = y_1 - 9y_2$$

$$y'_2 = y_1 + y_2$$

(Septiembre 2002. Ex.Res.)

Solución.-

Ecuación característica: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -9 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm 3i$.

Para $\lambda = 1 + 3i$ se obtiene el espacio de autovectores $x_1 - 3ix_2 = 0 \leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 3i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Para $\lambda = 1 - 3i$ se obtiene el espacio de autovectores $x_1 + 3ix_2 = 0 \leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -3i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Luego la solución general: $y = \begin{pmatrix} 3ic_1 e^{(1+3i)x} - 3ic_2 e^{(1-3i)x} \\ c_1 e^{(1+3i)x} + c_2 e^{(1-3i)x} \end{pmatrix}$. Poniendo $c_1 = A + Bi$, $c_2 = A - Bi$, teniendo en cuenta que $e^{ai} = \cos a + i \sin a$ y renombrando constantes, se tiene:

$$y = \begin{pmatrix} 3A \sin 3x + 3B \cos 3x \\ -A \cos 3x + B \sin 3x \end{pmatrix} e^x \leftrightarrow \begin{cases} y_1 = e^x \cdot 3A \sin 3x + e^x \cdot 3B \cos 3x \\ y_2 = -e^x \cdot A \cos 3x + e^x \cdot B \sin 3x \end{cases}$$

4º) Obtener la **solución general** del siguiente **sistema de ecuaciones diferenciales**

$$y_1' = 3y_1 + 2y_2 - 2y_3$$

$$y_2' = -y_1 - y_2 + y_3$$

$$y_3' = 2y_1 - y_3$$

(Enero 2003, ex. or)

Solución:

Obtenemos el polinomio característico que resulta ser $(t-1)(t^2 + 1)$, luego los valores propios son

1, i y -i. Los vectores propios respectivos resultan ser: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, luego la solución se

$$\text{expresaría: } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix}.$$

Poniendo $e^{ix} = \cos x + i \sin x$; $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$; $C_2 = A + Bi$ y $C_3 = A - Bi$ (para hacer desaparecer la unidad imaginaria i), se obtiene:

$$y_1 = C_1 e^x + (A - B) \cos x - (A + B) \sin x$$

$$y_2 = B \cos x + A \sin x$$

$$y_3 = C_1 e^x + 2A \cos x - 2B \sin x$$

5º) Obtener la **solución general** del siguiente **sistema de ecuaciones diferenciales**

$$y_1' = y_1 - y_2$$

$$y_2' = 2y_1 + y_2 \quad (\text{Enero 2003, ex. res.})$$

Solución:

Obtenemos el polinomio característico que resulta ser $t^2 - 2t + 3$, luego los valores propios son $1 + \sqrt{2}i$, y $1 - \sqrt{2}i$. Los vectores propios respectivos resultan ser: $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}$, luego la

solución se expresaría: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{2}i)x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{2}i)x}$.

Poniendo: $e^{\sqrt{2}ix} = \cos \sqrt{2}x + i \sin \sqrt{2}x$; $e^{-\sqrt{2}ix} = \cos \sqrt{2}x - i \sin \sqrt{2}x$ $C_1 = A + Bi$ y $C_2 = A - Bi$ (para hacer desaparecer la unidad imaginaria i), se obtiene:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2e^x (A \cos \sqrt{2}x - B \sin \sqrt{2}x) \\ y_2 &= 2\sqrt{2}e^x (B \cos \sqrt{2}x + A \sin \sqrt{2}x) \end{aligned}$$

$$6^\circ) \text{ Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales: } \left. \begin{aligned} y'_1 &= y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ y'_2 &= 3y_1 - 5y_2 + 3y_3 \\ y'_3 &= 6y_1 - 6y_2 + 4y_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Sept. 2004, ex. res.})$$

Solución.-

Los valores propios son 4 y -2 (doble) y los correspondientes vectores propios son:

para 4: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; para -2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solución general: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2x} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x}$

7º) Obtener la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} y'_1 &= 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y'_2 &= -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y'_3 &= y_1 - y_2 + 3y_3 \end{aligned}$$

(Sept. 2005, ex. res. y Sept. 2008. Res)

Solución.-

La matriz del sistema, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, tiene como polinomio característico $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 =$

$= (x - 2)(x - 3)(x - 6)$. Los vectores propios serían:

$$\text{Para } x = 2: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Para } x = 3: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Para } x = 6: \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego la solución general es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x}$$