

## **EJERCICIOS DE TRAYECTORIAS TEMPORALES PROPUESTOS EN EXÁMENES**

1. El coste de una pieza de un mercedes es de 700 euros; su valor se deprecia con el tiempo según la siguiente ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = -400(x+1)^{-2}$  donde y, en euros, es su valor x años después de su compra. ¿Cuál es el valor de la pieza siete años después de su compra? (Septiembre 2003)

**Solución.-**

$\frac{dy}{dx} = -400(x+1)^{-2} \Leftrightarrow dy = -400(x+1)^{-2}dx \Leftrightarrow y = 400(x+1)^{-1} + C$ ; para  $x = 0 \rightarrow y = 400 + C = 700 \rightarrow C = 300$ . Sustituyendo ahora  $x = 7 \rightarrow y = \mathbf{350 \text{ €}}$

2. En un mercado en competencia se conoce la **función de oferta**  $S = -5 + p$ , y la **función de demanda**  $D = 10 - 3p$ . Se pide calcular la expresión temporal del precio, sabiendo que el ritmo de variación del precio en el tiempo es igual al exceso de demanda sobre la oferta. Se sabe que el precio inicial es de 20 u.m. (Feb 2005, 1ª semana)

**Solución.-**

De acuerdo con el enunciado,  $\frac{dp}{dt} = p' = (10 - 3p) - (-5 + p) \Leftrightarrow p' + 4p = 15$ , que es una ecuación diferencial lineal. Ecuación característica  $t + 4 = 0 \rightarrow t = -4$  luego la solución general de la ecuación homogénea es  $p = C \cdot e^{-4t}$ ; por otra parte, una solución particular de la ecuación completa se obtiene haciendo  $p = A \rightarrow 4A = 15 \rightarrow A = \frac{15}{4}$ . Luego la solución general de la ecuación completa es  $p = C \cdot e^{-4t} + \frac{15}{4}$ . Para  $t = 0$  se obtiene  $20 = C + \frac{15}{4} \rightarrow C = \frac{65}{4}$ . Así pues, la expresión temporal del precio sería:  $p = \frac{65}{4} \cdot e^{-4t} + \frac{15}{4}$ .

3. La tasa a la que cambia el **precio de venta, y**, de un producto, respecto a su **demanda, x**, viene dada por la siguiente ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x^2 + xy)}{x^2 + y^2}$ . Calcular el **precio en función de la demanda**, sabiendo que cuando el precio es de 5 euros, la demanda es de 15 unidades. (Feb 2005, 1ª semana)

**Solución.-**

Escribiendo la ecuación de la forma  $2(x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ , podemos comprobar que es diferencial exacta, luego:  $\int 2(x^2 + xy)dx = \frac{2}{3}x^3 + x^2y + C(y)$  y derivando respecto a y, se debe cumplir:  $x^2 + C'(y) = x^2 + y^2 \rightarrow C'(y) = y^2 \rightarrow C(y) = \frac{1}{3}y^3 - C$ . La solución general es pues:  $\frac{2}{3}x^3 + x^2y + \frac{1}{3}y^3 = C$ . Para las condiciones dadas:  $\frac{2}{3} \cdot 3375 + 225 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 125 = \frac{10250}{3} = C$ , de donde la solución:  $\mathbf{2x^3 + 3x^2y + y^3 = 10250}$

4. Un rumor se propaga en una población de 2.500 habitantes a un ritmo proporcional al número de personas que todavía desconocen la noticia. Designemos por p al número de

personas que conocen la noticia. Se sabe que cuando ha transcurrido un día, la noticia ya la conocen 500 individuos. Se pide calcular el número de personas que lo saben al cabo de dos días. (Feb 2005, 2ª semana)

**Solución.-**

Se tendrá que  $p' = k(2500 - p) \Leftrightarrow p' + kp = 2500k$ , ecuación diferencial lineal cuya solución general es  $p = 2500 + C \cdot e^{-kt}$ ; para  $t = 0 \rightarrow p = 0$  y para  $t = 1 \rightarrow p = 500$ , de donde  $C = -2500$  y  $k = \ln \frac{5}{4}$ , luego  $p = 2500 \left( 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^t \right)$ . Si  $t = 2 \rightarrow p = 2500 \left( 1 - \frac{16}{25} \right) = 900$

**5 La evolución de las ventas de cierto producto en el tiempo es proporcional a la función :**

$f(t) = e^{2t-100}$ . Si la constante de proporcionalidad es  $\frac{1}{3}$ , estúdiase la trayectoria de la función de ventas.

(Sep. 2005. Or)

**Solución.-**

La evolución de las ventas sería:  $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3} e^{2t-100}$  de donde integrando se obtiene que

$$V = \frac{1}{6} e^{2t-100} + C.$$

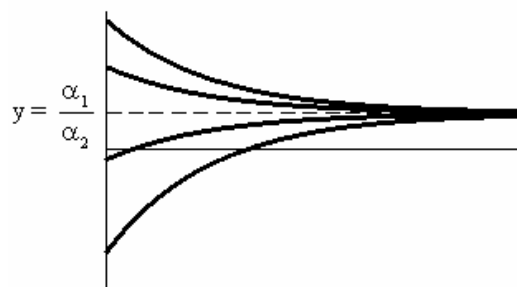
**6. Obtenga y represente gráficamente las trayectorias temporales referidas a un modelo uniecuacional con trayectoria de crecimiento asintótico. (Sep 05 res)**

**Respuesta:**

El crecimiento o variación de una función  $y$  que depende de la variable temporal  $t$ , se expresa mediante su derivada  $y' = \frac{dy}{dt}$ . Decimos que es asintótico si  $\frac{dy}{dt} = \alpha_1 - \alpha_2 y$ , con  $\alpha_1 > 0$  y  $\alpha_2 > 0$ .

Se tiene que  $\frac{dy}{\alpha_1 - \alpha_2 y} = dt$ , e integrando:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha_2} \ln |\alpha_1 - \alpha_2 y| &= t + C \Rightarrow \ln |\alpha_1 - \alpha_2 y| = \\ &= -\alpha_2 t - \alpha_2 C \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 y = K e^{-\alpha_2 t}, \text{ siendo } K = \\ e^{-\alpha_2 C} \Rightarrow y &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{K}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t}. \end{aligned}$$



(depende de la constante  $K$ ), tiende asintóticamente, cuando  $t \rightarrow \infty$ , a la recta  $y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ .

**7. La razón a la que está disminuyendo la demanda de un producto, expresada en unidades por año, viene dada por la siguiente función exponencial  $50.000 e^{-0,2t}$ . Y donde  $t = 0$  corresponde al uno de enero de 2006. Hállese la razón a la que cambia la demanda cuando  $t = 5$ . ¿ Cuántas unidades se demandarán entre los años 2006 y 2015, ambos inclusive?.**

**Nota:** Tómese  $e^{-1} = 0,37$  y  $e^{-2} = 0,135$

**Solución.- (feb 06)**

Para  $t = 5$ , la razón a que disminuye la demanda será:  $50000e^{-0,2 \cdot 5} = 50000 \cdot e^{-1} \cong 18500$  unidades/año.

Las unidades demandadas entre los años 2006 y 2015 serán:

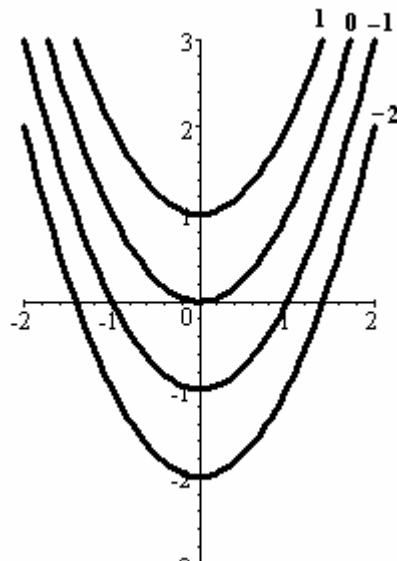
$$\int_0^{10} 50000 \cdot e^{-0,2t} dt = -\frac{50000}{0,2} [e^{-0,2t}]_0^{10} = -250000(e^{-2} - 1) \cong 216250$$

**8. Hallar la ecuación del haz de curvas** tales que la pendiente en cualquier punto de ellas es igual al doble de la abscisa del punto. Asimismo representar gráficamente el haz de curvas resultantes.

**Solución.-** (sep 07)

Tales curvas verifican  $y' = 2x \rightarrow y = \int 2x dx = x^2 + C$ .

Sus gráficas son parábolas. En la figura se han representado para  $C = -2$ ,  $C = -1$ ,  $C = 0$ ,  $C = 1$ .



**9. Hallar la ecuación del haz de curvas** tales que la pendiente en cualquier punto de ellas es igual al doble de la ordenada del punto. Asimismo representar gráficamente el haz de curvas resultantes. (sep 07 res)

**Solución.-**

Tales curvas verificarán que  $y' = 2y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2$

$\Leftrightarrow \ln y = 2x + C \Leftrightarrow (\text{haciendo } e^C = K) \Leftrightarrow y = Ke^{2x}$ .

En la figura adjunta están representadas las curvas resultantes para distintos valores de  $K$ . El valor de la ordenada en el origen de cada curva es el correspondiente valor de  $K$ . Para  $K = 0$ , se obtiene el eje de abscisas.

