



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
Asignatura: **MATEMÁTICAS III**. Segundo Curso de ADE.

PRUEBA PERSONAL SEPTIEMBRE. 2002 (EX. OR)

PRIMERA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Utilizando el criterio de D'Alembert o del cociente, demostrar que la siguiente serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ es **divergente**.

Solución.-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1 \Rightarrow \text{la serie es divergente.}$$

2. Obtenga el valor de la siguiente integral: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x dx$

Solución.-

$$\begin{aligned} \text{Llamemos } A_8 \text{ a la integral. Por partes, } A_8 &= \left[-\cos x \cdot \sin^7 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^6 x dx = \\ &= 7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx - 7A_8 = 7A_6 - 7A_8 \Rightarrow A_8 = \frac{7}{8} A_6, \text{ luego } A_8 = \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} A_0 = \frac{35}{128} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{35}{256} \pi. \end{aligned}$$

3. Sea $C(x)$ la función que representa el coste total de producir x unidades de un cierto producto. La razón a la que varía la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de $C(x)$ es la constante -2 . Sabiendo que dicha gráfica pasa por los puntos $A(1, -15)$ y $B(2, 0)$, se pide hallar la ecuación de dicho coste total.

Solución.-

$C''(x) = -2 \Rightarrow C'(x) = -2x + C_1 \Rightarrow C(x) = -x^2 + C_1 x + C_2$. Sustituyendo las coordenadas de A y B , se obtiene que $C_1 = 18$ y $C_2 = -32 \Rightarrow C(x) = -x^2 + 18x - 32$.

4. Un concesionario de coches adquiere 105 coches, que puede ir vendiendo a razón de 7 coches por semana. Si el coste de almacenaje es de **50 euros/coche y semana**, ¿cuánto tendrá que pagar por el almacenaje?

Solución.-

$$\text{Coste de almacenaje} = \int_0^{15} 50(105 - 7x) dx = 50 \left[105x - \frac{7x^2}{2} \right]_0^{15} = 39375 \text{ €}.$$

5. Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia: $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{x-e^x} dx$.

Solución.-

$$\text{Cambio } e^x = t \Rightarrow I = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$$



SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

PROBLEMA NÚMERO 1.

Obtener el valor de la integral doble $I = \iint_R (x+y)(x-y)^4 dx dy$ efectuando el siguiente

cambio de variable: $x = \frac{u+v}{2}$; $y = \frac{u-v}{2}$, siendo R la región del plano limitada por las cuatro siguientes rectas: $x+y=1$; $x+y=3$; $x-y=1$; $x-y=-1$

Solución.-

$x+y=u$ $x-y=v$, luego el recinto R está limitado por $u=1$, $u=3$; $v=1$, $v=-1$.

$$\text{El jacobiano } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \iint_R u \cdot v^4 du dv = \frac{1}{2} \int_1^3 u du \int_{-1}^1 v^4 dv = \frac{4}{5}$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Dado el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, obtener la solución general del mismo:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 \\ y_3' &= y_2 + y_3 \end{aligned}$$

Solución.-

$$\text{Ecuación característica: } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Para $\lambda=1$, el espacio de autovectores es la recta $x_1=x_2=0$, luego no podemos obtener dos autovectores linealmente independientes, es decir, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

Construiremos pues las soluciones:

$$\text{para } \lambda=1: z_1 = \begin{pmatrix} (c_1 x + c_2) e^x \\ (c_3 x + c_4) e^x \\ (c_5 x + c_6) e^x \end{pmatrix}; \text{ para } \lambda=3: z_2 = \begin{pmatrix} c_7 e^{3x} \\ c_8 e^{3x} \\ c_9 e^{3x} \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en el sistema, se obtiene:

- para z_1 :

$$c_1 e^x + (c_1 x + c_2) e^x = (c_1 x + c_2) e^x \rightarrow c_1 e^x = 0 \rightarrow c_1 = 0$$

$$c_3 e^x + (c_3 x + c_4) e^x = (c_1 x + c_2) e^x + 3(c_3 x + c_4) e^x \rightarrow (c_3 - 2c_4 - c_2) e^x - 2(c_3 + c_1) x e^x = 0 \rightarrow \begin{cases} c_3 = 0 \\ c_2 = -2c_4 \end{cases}$$

$$c_5 e^x + (c_5 x + c_6) e^x = (c_3 x + c_4) e^x + (c_5 x + c_6) e^x \rightarrow (c_5 - c_4) e^x - c_3 x e^x = 0 \rightarrow c_4 = c_5$$

- para z_2 :

$$3c_7 e^{3x} = c_7 e^{3x} \rightarrow 2c_7 e^{3x} = 0 \rightarrow c_7 = 0$$

$$3c_8 e^{3x} = c_7 e^{3x} + 3c_8 e^{3x}$$

$$3c_9 e^{3x} = c_8 e^{3x} + c_9 e^{3x} \rightarrow (2c_9 - c_8) e^{3x} = 0 \rightarrow c_8 = 2c_9.$$



Es decir: $z_1 = \begin{pmatrix} -2c_5 e^x \\ c_5 e^x \\ (c_5 x + c_6) e^x \end{pmatrix}$ y $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2c_9 e^{3x} \\ c_9 e^{3x} \end{pmatrix}$.

Renumerando las constantes, es decir poniendo $c_5 = C_1$, $c_6 = C_2$ y $c_9 = C_3$, obtenemos la solución general:

$$z = z_1 + z_2 = \begin{pmatrix} -2C_1 e^x \\ 2C_3 e^{3x} + C_1 e^x \\ C_3 e^{3x} + (C_1 x + C_2) e^x \end{pmatrix}$$