



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.

PRUEBA PERSONAL SEPTIEMBRE. 2002 (EX. RESERVA)

PRIMERA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Utilizando el criterio de d'Alembert o del cociente, demostrar que la siguiente serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ es convergente.

Solución.-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{la serie es convergente}$$

2. Obtenga el valor de la siguiente integral euleriana: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{\sin x} dx$.

Solución.-

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sqrt{\sin x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \cos x dx = \beta\left(\frac{5}{4}, 1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + 1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4} + 1\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\frac{5}{4} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{4}{5}$$

3. Sea $C(x)$ la función que representa el coste total de producir x unidades de un cierto producto. La razón a la que varía la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de $C(x)$ es la constante 2. Sabiendo que dicha gráfica pasa por los puntos $A(2, 12)$ y $B(3, 18)$, se pide hallar la ecuación de dicho coste total

Solución.-

$C''(x) = 2 \Rightarrow C'(x) = 2x + C_1 \Rightarrow C(x) = x^2 + C_1x + C_2$. Sustituyendo las coordenadas de A y B , se obtiene que $C_1 = 1$ y $C_2 = 6 \Rightarrow C(x) = x^2 + x + 6$.

4. Sea x el precio unitario de venta de un producto, e y la oferta de dicho producto. Se sabe que la razón a la que cambia la oferta respecto al precio viene dado por la ecuación diferencial: $x(x+3)dy - y(2x+3)dx = 0$. Sabiendo que para $x = 2$ el valor de y es 20 unidades, se pide hallar la oferta en función del precio.

Solución.-

$x(x+3)dy - y(2x+3)dx = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy = \frac{2x+3}{x(x+3)} dx = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} \right) dx \Leftrightarrow \ln y = [\ln x + \ln(x+3)] + \ln C \Leftrightarrow y = Cx(x+3)$. Sustituyendo la condición dada se obtiene que $C = 2$, luego la oferta en función del precio es $y = 2x(x+3)$.

5. Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia: $I = \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^8} dx$

Solución.-

Cambio $\ln x = t$, de donde $x = 2 \rightarrow t = \ln 2$, $x = \infty \rightarrow t = \infty$ y $\frac{dx}{x} = dt \Rightarrow I = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^8} dt = -\frac{1}{7} \left[\frac{1}{t^7} \right]_{\ln 2}^{\infty} = \frac{1}{7(\ln 2)^7}$.



SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

PROBLEMA NÚMERO 1.

Calcular el volumen que determina la función $f(x, y) = x \cdot y$ sobre el recinto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \geq 0\}$$

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \iint_A xy \, dx \, dy = (\text{cambiando a polares}) = \int_1^2 \rho^3 \, d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 \left[\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Dado el siguiente **sistema de ecuaciones diferenciales**, obtener la solución general del mismo:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_1 - 9y_2 \\ y'_2 &= y_1 + y_2 \end{aligned}$$

Solución.-

$$\text{Ecuación característica: } \begin{vmatrix} 1-\lambda & -9 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda = 1 \pm 3i.$$

$$\text{Para } \lambda = 1 + 3i \text{ se obtiene el espacio de autovectores } x_1 - 3ix_2 = 0 \leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 3i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\text{Para } \lambda = 1 - 3i \text{ se obtiene el espacio de autovectores } x_1 + 3ix_2 = 0 \leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -3i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\text{Luego la solución general: } y = \begin{pmatrix} 3ic_1 e^{(1+3i)x} - 3ic_2 e^{(1-3i)x} \\ c_1 e^{(1+3i)x} + c_2 e^{(1-3i)x} \end{pmatrix}. \text{ Poniendo } c_1 = A + Bi,$$

$c_2 = A - Bi$, teniendo en cuenta que $e^{ai} = \cos a + i \sin a$ se tiene:

$$\begin{aligned} 3ic_1 e^{(1+3i)x} - 3ic_2 e^{(1-3i)x} &= 3i(A+Bi)e^x e^{i3x} - 3i(A-Bi)e^x e^{-i3x} = \\ &= 3i(A+Bi)e^x (\cos 3x + i \sin 3x) - 3i(A-Bi)e^x (\cos 3x - i \sin 3x) = \\ &= 3e^x [(Ai-B)(\cos 3x + i \sin 3x) - (Ai+B)(\cos 3x - i \sin 3x)] = 3e^x [-2B \cos 3x - 3A \sin 3x] \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} c_1 e^{(1+3i)x} + c_2 e^{(1-3i)x} &= (A+Bi)e^x e^{i3x} + (A-Bi)e^x e^{-i3x} = \\ &= (A+Bi)e^x (\cos 3x + i \sin 3x) + (A-Bi)e^x (\cos 3x - i \sin 3x) = e^x (2A \cos 3x - 2B \sin 3x) \end{aligned}$$

renombrando constantes, es decir, poniendo A en lugar de -2A y B en lugar de -2B, se tiene:

$$y = \begin{pmatrix} 3A \sin 3x + 3B \cos 3x \\ -A \cos 3x + B \sin 3x \end{pmatrix} e^x \leftrightarrow \begin{cases} y_1 = e^x \cdot 3A \sin 3x + e^x \cdot 3B \cos 3x \\ y_2 = -e^x \cdot A \cos 3x + e^x \cdot B \sin 3x \end{cases}$$