



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.

PRUEBA PERSONAL. Enero 2003

1 PRIMERA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Demuestre si es **convergente o no la siguiente **serie numérica**:** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

Solución.-

Por el criterio de D'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{n+1}{(n+1)^2}}}{\frac{n}{e^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{n^2}}{ne^{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^{2n}} \right) = 0 < 1$$

luego la serie es convergente.

2. Si p es un número real mayor que uno, demostrar que $\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1)$.

Demostrar también que $\Gamma(1) = 1$, y deducir finalmente que si n es un número natural, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$

Solución:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \stackrel{\text{por partes}}{=} \left[-x^{p-1} e^{-x} \right]_0^{\infty} + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx = (p-1) \cdot \Gamma(p-1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

Demostraremos por inducción que, si n es un número natural, $\Gamma(n) = (n-1)!$:

Es cierta para $n = 1$.

Supongamos que es cierta para $n = p-1$, es decir que $\Gamma(p-1) = (p-2)!$; entonces $\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1) = (p-1) (p-2)! = (p-1)!$.

Luego es cierta $\forall n$.

3. Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

Solución:

$$\text{Hacemos el cambio } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow A = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{2+2t} dt = \ln |1+t| + C =$$

$$= \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

4. Obtenga y represente gráficamente las **trayectorias temporales referidas a un modelo uniecuacional con trayectoria de crecimiento asintótico.**

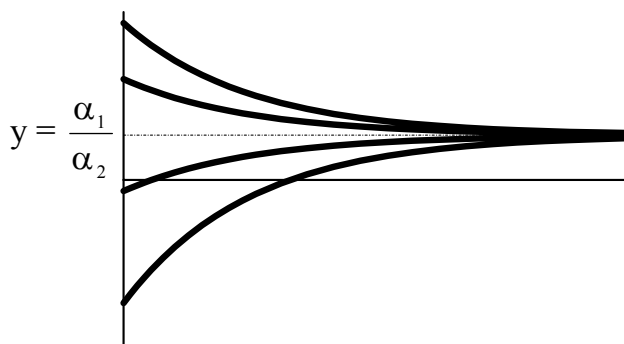


Solución:

El crecimiento o variación de una función y que depende de la variable temporal t , se expresa mediante su derivada $y' = \frac{dy}{dt}$. Decimos que es asintótico si $\frac{dy}{dt} = \alpha_1 - \alpha_2 y$, con $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.

Se tiene que $\frac{dy}{\alpha_1 - \alpha_2 y} = dt$, e integrando: $-\frac{1}{\alpha_2} \ln |\alpha_1 - \alpha_2 y| = t + C \Rightarrow$
 $\Rightarrow \ln |\alpha_1 - \alpha_2 y| = -\alpha_2 t - \alpha_2 C \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 y = K e^{-\alpha_2 t}$, siendo $K = e^{-\alpha_2 C} \Rightarrow y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{K}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t}$.

Cada curva de esta familia (depende de la constante K), tiende asintóticamente, cuando $t \rightarrow \infty$, a la recta $y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Gráficamente:



5. Señalemos por y , en euros, el **ingreso** que se obtiene al vender x unidades de un producto. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0$. Obtener y , en función de x , sabiendo que la venta de 1 unidad produce un ingreso de 1 euro.

Solución:

$y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)dy = x^2 dx$; integrando: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} + C$; puesto que $y(1) = 1 \rightarrow$
 $\frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} + C \rightarrow C = -1$, luego la solución es: $\frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} - 1 \Leftrightarrow y^3 - 3y - x^3 + 3 = 0$

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

PROBLEMA NÚMERO 1.

Dada la integral doble $A = \iint_R (x^2 + y^2)^{5/2} dx dy$ donde R es la región comprendida entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$

Se pide

1º Resolver la mencionada integral doble efectuando necesariamente un cambio de variables a **coordenadas polares**

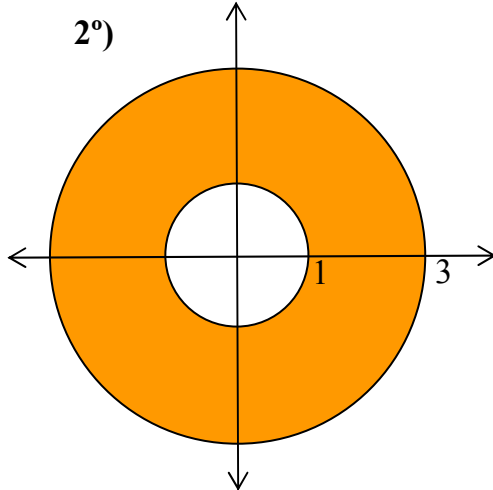
2º Dibujar el recinto en que se transforma el recinto inicial R cuando se efectúa la transformación a coordenadas polares

Solución:

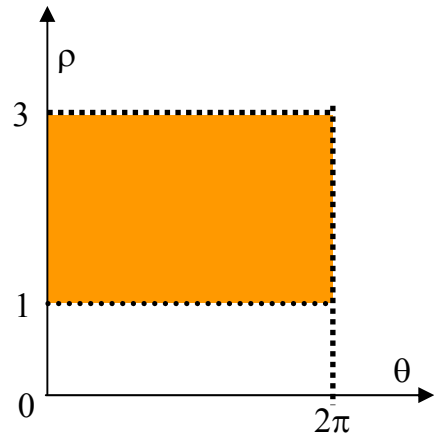
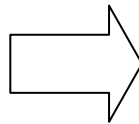
1º)

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 1 \leq \rho \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array} \right\} \quad J = \rho \Rightarrow A = \int_1^3 \rho^6 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_1^3 \rho^6 d\rho = \frac{4372\pi}{7}$$

2º)



En coordenadas cartesianas



En coordenadas polares

PROBLEMA NÚMERO 2.

Obtener la **solución general** del siguiente **sistema de ecuaciones diferenciales**

$$y_1' = 3y_1 + 2y_2 - 2y_3$$

$$y_2' = -y_1 - y_2 + y_3$$

$$y_3' = 2y_1 - y_3$$

Solución:

Obtenemos el polinomio característico que resulta ser $(t-1)(t^2 + 1)$, luego los valores

propios son 1, i y -i. Los vectores propios respectivos resultan ser: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

luego la solución se expresaría: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ \frac{-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ix} + C_3 \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ix}$.

Poniendo $e^{ix} = \cos x + i \sin x$; $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$; $C_2 = A+Bi$ y $C_3 = A-Bi$ (para hacer desaparecer la unidad imaginaria i), se obtiene:

$$y_1 = C_1 e^x + (A-B)\cos x - (A+B)\sin x$$

$$y_2 = B\cos x + A\sin x$$

$$y_3 = C_1 e^x + 2A\cos x - 2B\sin x$$