



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.
PRUEBA PERSONAL. Enero 2003 (Reserva)

1 PRIMERA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Demuestre si es **convergente o no** la siguiente **serie numérica**: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2$

Solución.-

Es divergente ya que no cumple la condición necesaria de convergencia. En efecto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 = 1 \neq 0$$

2. Calcular el valor de la integral euleriana $\beta(p, q)$ para los valores $p = \frac{5}{2}$, $q = \frac{7}{2}$

Solución:

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{45}{32} \pi = \frac{3}{256} \pi$$

3. Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$

Solución.-

Es inmediata poniendo $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{\tan^3 x}{3} + C$.

(Puede también hacerse el cambio $\tan x = t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} dx = dt \Rightarrow A = \int \frac{1 - \frac{1}{1+t^2}}{1+t^2} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\tan^3 x}{3} + C$)

4. Obtenga y represente gráficamente las **trayectorias temporales** referidas a un modelo uniecuacional con trayectoria de crecimiento asintótico.

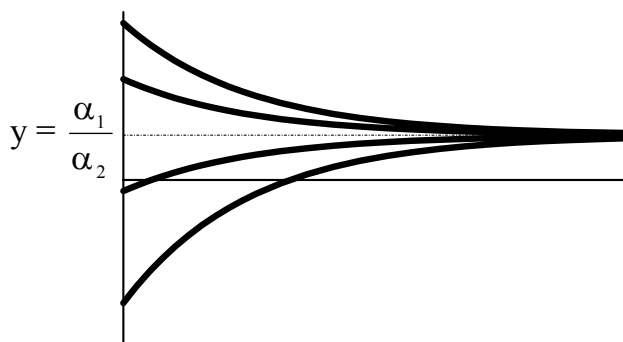
Solución:

El crecimiento o variación de una función y que depende de la variable temporal t, se expresa mediante su derivada $y' = \frac{dy}{dt}$. Decimos que es asintótico si $\frac{dy}{dt} = \alpha_1 - \alpha_2 y$, con $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.

Se tiene que $\frac{dy}{\alpha_1 - \alpha_2 y} = dt$, e integrando: $-\frac{1}{\alpha_2} \ln |\alpha_1 - \alpha_2 y| = t + C \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln |\alpha_1 - \alpha_2 y| = -\alpha_2 t - \alpha_2 C \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 y = K e^{-\alpha_2 t}$, siendo $K = e^{-\alpha_2 C} \Rightarrow y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{K}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t}$.

Cada curva de esta familia (depende de la constante K), tiende asintóticamente, cuando $t \rightarrow \infty$, a la recta $y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Gráficamente:



5. Señalemos por y la oferta de un cierto producto, y por x el precio unitario de venta en euros. Se sabe que la tasa a la que cambia la oferta respecto al precio viene dado por la siguiente ecuación diferencial: $x(x+3)dy - y(2x+3)dx = 0$. Hallar la oferta en función del precio sabiendo que para $x = 3$ euros sucede que la oferta es $y = 36$ unidades.

Solución:

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2x+3}{x(x+3)} dx = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} \right) dx \Rightarrow \ln y = \ln Kx(x+3) \Rightarrow y = Kx(x+3), \text{ luego } 36 = K \cdot 18 \\ \Rightarrow K = 2, \text{ de donde } y = 2x(x+3).$$

SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

PROBLEMA NÚMERO 1.

Dada la integral doble $A = \iint_R x(x^2 + y^2)^{1/2} dx dy$ donde R es el primer cuadrante definido por la ecuación $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Se pide

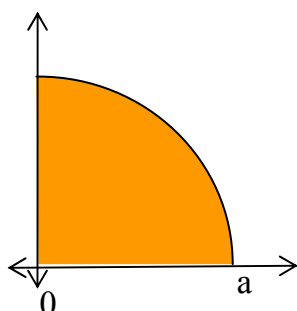
1º Resolver la mencionada integral doble efectuando necesariamente un cambio de variables a **coordenadas polares**

2º Dibujar el recinto en que se transforma el recinto inicial R cuando se efectúa la transformación a coordenadas polares

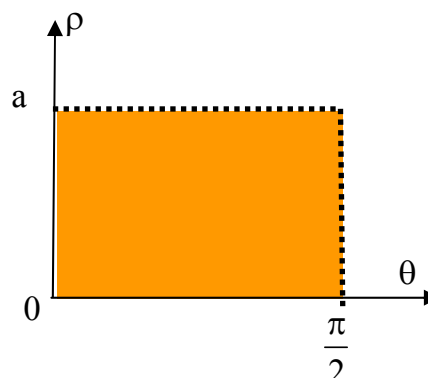
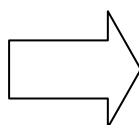
Solución:

$$1^\circ \left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq a \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \quad J = \rho \Rightarrow A = \int_0^a \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = \frac{a^4}{4}$$

2º)



En coordenadas cartesianas



En coordenadas polares



PROBLEMA NÚMERO 2.

Obtener la **solución general** del siguiente **sistema de ecuaciones diferenciales**

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2\end{aligned}$$

Solución:

Obtenemos el polinomio característico que resulta ser $t^2 - 2t + 3$, luego los valores propios son $1 + \sqrt{2}i$, y $1 - \sqrt{2}i$. Los vectores propios respectivos resultan ser: $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix}$, luego la solución se expresaría: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(1+\sqrt{2}i)x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{2}i)x}$.

Poniendo: $e^{\sqrt{2}ix} = \cos \sqrt{2}x + i \sin \sqrt{2}x$; $e^{-\sqrt{2}ix} = \cos \sqrt{2}x - i \sin \sqrt{2}x$ $C_1 = A + Bi$ y $C_2 = A - Bi$ (para hacer desaparecer la unidad imaginaria i), se obtiene:

$$\begin{aligned}y_1 &= 2e^x (A \cos \sqrt{2}x - B \sin \sqrt{2}x) \\ y_2 &= 2\sqrt{2}e^x (B \cos \sqrt{2}x + A \sin \sqrt{2}x)\end{aligned}$$