



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.
PRUEBA PERSONAL SEPTIEMBRE 2003

PRIMERA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Calcular mediante las integrales eulerianas $A = \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Solución.-

Cambio $x^4 = t \rightarrow x = \sqrt[4]{t}$; $dx = \frac{dt}{4\sqrt[4]{t^3}}$; si $x = 0 \rightarrow t = 0$ y si $x = 1 \rightarrow t = 1$, luego:

$$A = \frac{1}{4} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

2. Estudiar la convergencia (absoluta y condicional) de la serie: $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n}{2^n}$

Solución.-

Aplicamos a la serie de los valores absolutos $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}$ el criterio de d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

Así pues la serie dada es absolutamente convergente. Por tanto es convergente y no condicionalmente convergente.

3. El coste de una pieza de un mercedes es de 700 euros; su valor se deprecia con el tiempo según la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -400(x+1)^{-2}$ donde y, en euros, es su valor x años después de su compra. ¿Cuál es el valor de la pieza siete años después de su compra?

Solución.-

$$\frac{dy}{dx} = -400(x+1)^{-2} \leftrightarrow dy = -400(x+1)^{-2} dx \leftrightarrow y = 400(x+1)^{-1} + C; \text{ para } x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 400 + C = 700 \rightarrow C = 300. \text{ Sustituyendo ahora } x = 7 \rightarrow y = \mathbf{350 \text{ €}}$$

4. Un almacenista adquiere 10.000 kilos de arroz, que puede ir vendiendo a razón de 2.500 kilos por semana. Si el coste de almacenaje es de 0,005 euros/kilo y semana. ¿Cuánto tendrá que pagar por el almacenaje?

Solución.-

El almacén se vaciará en 4 semanas. Supongamos que han transcurrido x semanas, $0 \leq x \leq 4$. Entonces, en el almacén quedarán $(10000 - 2500x)$ kilos cuyo coste de almacenaje es $(10000 - 2500x) \cdot 0,005 \text{ €} = (50 - 12,5x) \text{ €}$. Así pues, el coste total sería $\int_0^4 (50 - 12,5x) dx =$
 $= \left[50x - 6,25x^2 \right]_0^4 = \mathbf{100 \text{ €}}$.



5. Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia: $A = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$

Solución.-

Puesto que $e^{-x} \sin x \leq e^{-x}$ y la integral $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ es convergente, entonces la integral propuesta también lo será. Calculemos su valor: $A = \left[-\cos x e^{-x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx = 1 - \left(\left[\sin x e^{-x} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx \right) = 1 - A \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.

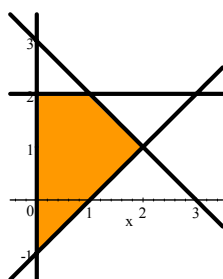
SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

PROBLEMA NÚMERO 1.

Obtener el valor de la integral doble $I = \iint_R y dx dy$

Siendo R la región del plano limitada por las cuatro siguientes rectas:
 $x + y - 3 \leq 0$; $x - y - 1 \leq 0$; $y \leq 2$; $x \geq 0$

Solución.-



$$\begin{aligned} \iint_R y dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x-1}^2 y dy + \int_1^2 dx \int_{x-1}^{3-x} y dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [y^2]_{x-1}^2 dx + \frac{1}{2} \int_1^2 [y^2]_{x-1}^{3-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [4 - (x-1)^2] dx + \frac{1}{2} \int_1^2 [(3-x)^2 - (x-1)^2] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[4x - \frac{(x-1)^3}{3} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[-\frac{(3-x)^3}{3} - \frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Resolver la ecuación diferencial $y(1+xy)dx - xdy = 0$

Solución.-

Puesto que $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{-1 - (1+2xy)}{y(1+xy)} = \frac{-2}{y}$ depende sólo de y, la ecuación diferencial posee un factor integrante μ que depende sólo de y. Concretamente:

$$\frac{\frac{d\mu}{dy}}{\mu} = \frac{-2}{y} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{-2}{y} dy \Rightarrow \ln \mu = -2 \ln y \Rightarrow \mu = \frac{1}{y^2}$$

luego $\frac{1+xy}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$ es diferencial exacta. Así pues $f(x,y) = -\int \frac{x}{y^2} dy = \frac{x}{y} + C(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{dC(x)}{dx} = \frac{1+xy}{y} \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx} = x \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2}$. Luego la solución es:

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = k$$