



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.**  
**MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**  
**PRUEBA PERSONAL SEPTIEMBRE 2003. RESERVA**

**PRIMERA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas**

1. Calcular mediante las integrales eulerianas el valor de  $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$

**Solución.-**

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)^{-\frac{1}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

2. Calcular el valor de la integral:  $\int_0^1 (Lx)^{2n} dx$  (siendo L el logaritmo neperiano)

**Solución.-**

Llamemos  $I_{2n}$  a la integral. Resolviéndola por partes:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \left[ x \cdot (\ln x)^{2n} \right]_0^1 - 2n \int_0^1 (\ln x)^{2n-1} dx = -2n \cdot I_{2n-1} = (\text{reiterando el procedimiento}) = 2n! \cdot I_0 = \\ &= 2n! \cdot \int_0^1 dx = \boxed{2n!} \end{aligned}$$

3. Estudiar el carácter de la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

**Solución.-**

Aplicamos el criterio de Cauchy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 1 - 1 = 0 < 1$  luego la serie es convergente.

4. Sea  $y$ , en euros, el ingreso obtenido por la venta de  $x$  unidades de un producto. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)}$ . Hállese  $y$  en función de  $x$ , sabiendo

que la venta de 10 unidades produce unos ingresos de 100 euros.

**Solución.-**

Escribimos la ecuación diferencial en la forma:  $\frac{1}{y} dy = \frac{(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)} dx$ . Integrando:

$$\ln y = \int \frac{(3x^2 - 4x)}{x(x^2 - 2x)} dx = \int \frac{3x - 4}{x^2 - 2x} dx = \int \left( \frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \ln kx^2(x-2), \quad \text{de donde}$$

$$y = kx^2(x-2) \int \frac{3x-4}{x^2-2x} dx = . \text{ Si } x = 10 \Rightarrow 100 = k \cdot 100 \cdot 8 \Rightarrow k = \frac{1}{8}, \text{ luego:}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{8} x^2(x-2)}$$



5. Hallar un factor integrante que convierta en exacta la siguiente ecuación diferencial:  
 $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$

**Solución.-**

Puesto que  $\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = -\frac{4}{y}$  depende sólo de  $y$ , existe factor integrante dependiente de  $y$ ,

a saber:

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{\mu} = -\frac{4}{y} \Rightarrow \ln \mu = -4 \ln y \Rightarrow \mu = y^{-4}$$

Así pues:  $\frac{3x^2 - y^2}{y^4} dy - \frac{2x}{y^3} dx = 0$  será diferencial exacta  $\Rightarrow f(x,y) = -\frac{2}{y^3} \int x dx = -\frac{x^2}{y^3} + C(y)$

$\Rightarrow \frac{3x^2}{y^4} + C'(y) = \frac{3x^2 - y^2}{y^4} \Rightarrow C'(y) = -\frac{1}{y^2} \Rightarrow C(y) = \frac{1}{y} + C$ . La solución general es pues:

$$\boxed{-\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} + C = 0}$$

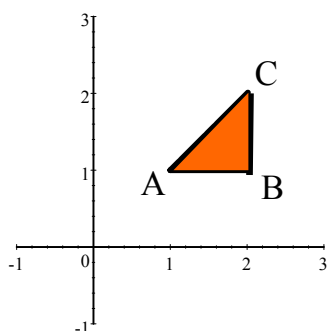
## SEGUNDA PARTE: PROBLEMAS

### PROBLEMA NÚMERO 1.

Obtener el valor de la integral doble  $I = \iint_R xy^2 dx dy$

Siendo  $R$  la región del plano definida por los tres vértices:  $A(1,1)$ ;  $B(2,1)$ ;  $C(2,2)$

**Solución.-**



$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 x dx \int_1^x y^2 dy = \int_1^2 x \left[ \frac{y^3}{3} \right]_1^x dx = \\ &= \int_1^2 x \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \right] dx = \int_1^2 \left( \frac{x^4}{3} - \frac{x}{3} \right) dx = \left[ \frac{x^5}{15} - \frac{x^2}{6} \right]_1^2 = \\ &= \boxed{\frac{47}{30}} \end{aligned}$$

### PROBLEMA NÚMERO 2.

Resolver la ecuación diferencial:  $y' + 2xy = xy^2$ .

**Solución.-**

$$y' = x(y^2 - 2y) \Rightarrow \frac{dy}{y^2 - 2y} = x dx \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy = x dx \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{y-2}{y} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y-2}{y} = Ce^{x^2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{1 - Ce^{x^2}}}$$