



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.**  
**MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

**PRUEBA PERSONAL. Enero 2004**

**PRIMERA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas**

1. Si  $y$  representa la oferta de un cierto producto, siendo  $x$  el precio unitario de venta, se sabe que la razón a la que cambia la oferta respecto al precio viene dada por la siguiente ecuación diferencial:  $x(x+3)dy - y(2x+3)dx = 0$ . Calcule la oferta en función del precio, sabiendo que para un precio de  $x = 2$  unidades monetarias, la oferta del producto es  $y = 20$  unidades.

**Solución.-**

$x(x+3)dy - y(2x+3)dx = 0 \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x+3}{x(x+3)}dx = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right)dx \rightarrow \ln y = \ln x(x+3) + \ln C \rightarrow$   
 $\rightarrow y = Cx(x+3)$ . De las condiciones dadas,  $20 = 10C \rightarrow C = 2$ , luego la oferta en función del precio es  $y = 2x(x+3)$ .

2. Por reducción a serie telescópica, estudiar el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

**Solución.-**

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$  y dando valores, tendremos:

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \dots; a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}. \text{ Sumando:}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

la serie pues es convergente y si suma vale  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim S_n = 1$ .

3. Calcular el valor de la siguiente integral euleriana:  $\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}} dx$

**Solución.-**

Hacemos el cambio  $x^4 = t \rightarrow x = t^{\frac{1}{4}} \rightarrow dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt$ . Sustituyendo:

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{4} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{4} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{1} = \frac{\pi}{8}$$

4. Calcule la expresión que convierte la siguiente ecuación diferencial:

$$4xdy + (16y - x^2)dx = 0$$

en una ecuación diferencial total exacta.

**Solución.-**

Admite un factor integrante dependiente de  $x$  ya que  $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{3}{x}$  depende sólo de

$x$ . Se tendrá:  $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{3}{x} \rightarrow \ln \mu(x) = 3 \ln x \rightarrow \mu(x) = x^3$ .

5. Durante  $t$  años, un plan de pensiones ( $P_1$ ) generará intereses a una tasa de  $I_1(t) = t^2 + 150$  euros por año; mientras que otro ( $P_2$ ) los generará a una tasa de  $I_2(t) = 5t + 300$  euros por año. ¿ Durante cuántos años es más rentable el plan ( $P_2$ ) que el ( $P_1$ ) ? . ¿Cuál sería el exceso de intereses generado, si se invierte en el plan ( $P_2$ ) , durante los años obtenidos en el punto anterior?.

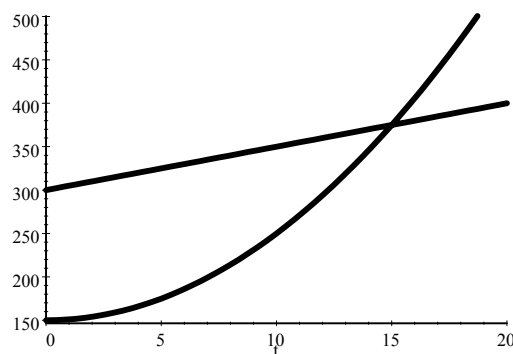
**Solución.-**

$I_1(t) = I_2(t) \rightarrow t^2 + 150 = 5t + 300 \rightarrow t^2 - 5t - 150 = 0 \rightarrow t = 15$  (la solución negativa no tiene significado).

Así pues el plan  $P_2$  es más rentable que el  $P_1$  durante los primeros 15 años (ver figura).

El exceso de intereses generado vendrá dado por el área comprendida entre ambas funciones:

$$\int_0^{15} (-t^2 + 5t + 150) dt = \left[ -\frac{t^3}{3} + \frac{5t^2}{2} + 150t \right]_0^{15} = 1687,5 \text{ euros.}$$



## SEGUNDA PARTE: Problemas

### PROBLEMA NÚMERO 1.

Utilizando necesariamente coordenadas polares, en todo el desarrollo, calcular cuales serán tanto los límites de integración, como la expresión de la función subintegral, en la siguiente integral que inicialmente aparece en coordenadas cartesianas  $I =$

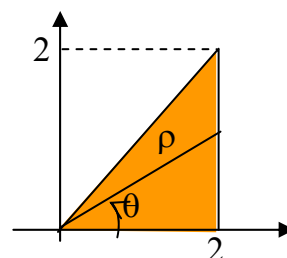
$$= \int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy$$

**Solución.-**

Puesto que  $x \in [0, 2]$  y, para cada  $x$ ,  $y \in [0, x]$ , el recinto de integración es el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  y  $(2, 2)$ .

Así pues, en polares, el ángulo  $\theta$  varía entre 0 y  $\frac{\pi}{4}$  y, para un  $\theta$

fijo, el radio  $\rho$  varía entre 0 y  $\frac{2}{\cos \theta}$ . La integral quedaría:



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{2}{\cos \theta}} f(\rho) \rho d\rho$$

### PROBLEMA NÚMERO 2.

Sabiendo que  $y_1$  e  $y_2$  son dos variables económicas interrelacionadas, obtener:

1º) La solución general del siguiente sistema lineal completo de ecuaciones diferenciales.

$$y_1' = 2y_2 - 6$$

$$y_2' = 8y_1 - 16$$

2º) Obténgase además la solución particular del sistema que verifica las condiciones iniciales:  $y_1(0) = 1$ ;  $y_2(0) = 4$

**Solución.-**

1º) Calculamos primeramente la solución general del sistema homogéneo.



Los valores propios:  $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 8 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda = \pm 4.$

Los vectores propios:

$$\text{- para } \lambda = 4: \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{- para } \lambda = -4: \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Una solución particular de la ecuación completa será de la forma  $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ . Sustituyendo:

$$\begin{cases} 0 = 2B - 6 \\ 0 = 8A - 16 \end{cases} \rightarrow A = 2; B = 3$$

Así pues, la solución general sería:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-4x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} y_1 = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-4x} + 2 \\ y_2 = 2C_1 e^{4x} - 2C_2 e^{-4x} + 3 \end{cases}$$

2º)

Sustituyendo para  $x = 0 \rightarrow \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 2 \\ 4 = 2C_1 - 2C_2 + 3 \end{cases} \rightarrow C_1 = -\frac{1}{4}; C_2 = -\frac{3}{4}$ . Luego la

solución particular para las condiciones dadas es:

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{3}{4}e^{-4x} + 2 \\ y_2 = -\frac{1}{2}e^{4x} + \frac{3}{2}e^{-4x} + 3 \end{cases}$$