



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Febrero 2004. 2ª semana

PRIMERA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Se sabe que las reservas de petróleo, de un determinado país árabe son $9 \cdot 10^9$ toneladas, al comienzo del año 2004. La producción extraída del país, en el año 2004, ha sido de $8 \cdot 10^7$ toneladas. Asimismo, ese país irá reduciendo la producción extraída cada año en un 1%, a partir del año 2004. Se pregunta: ¿Cuánto le durarán las reservas?

Solución.-

La producción $y = y(x)$ extraída el año $2004+x$ es una trayectoria de decrecimiento proporcional constante, es decir, se cumple: $\frac{dy}{dx} = -0,01y \rightarrow \frac{dy}{y} = -0,01dx \rightarrow$

$\ln y = -0,01x + \ln C \rightarrow y = Ce^{-0,01x}$. Puesto que $y(0) = 8 \cdot 10^7$, se obtiene que $C = 8 \cdot 10^7$, de donde $y = 8 \cdot 10^7 e^{-0,01x}$. Las reservas se agotarían el año $2004+t$ para el que se verifique:

$$\int_0^t 8 \cdot 10^7 \cdot e^{-0,01x} dx = 9 \cdot 10^9$$

efectuando la integral, se obtiene: $8 \cdot 10^7 \cdot (1 - e^{-0,01t}) = 9 \cdot 10^9 \rightarrow e^{-0,01t} = -\frac{1}{8}$, ecuación que no tiene solución, es decir, al ritmo de extracción propuesto nunca se agotarán las reservas.

2. Estudiar el carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}$

Solución.-

$$\text{Se tiene que: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)(3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)(4n+2)}}{\frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1, \text{ luego por el}$$

criterio de d'Alambert, la serie es convergente.

3. Calcular el valor de la siguiente integral euleriana: $A = \int_0^1 \sqrt{1-x^5} dx$

Solución.-

Hagamos el cambio $x^5 = t \rightarrow x = t^{\frac{1}{5}} \rightarrow dx = \frac{1}{5} t^{-\frac{4}{5}} dt$. Sustituyendo:

$$A = \frac{1}{5} \int_0^1 t^{-\frac{4}{5}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{5} \beta\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{5 \Gamma\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{5 \Gamma\left(\frac{17}{10}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{5}\right)}{7 \Gamma\left(\frac{7}{10}\right)}$$

Si usamos tablas de la función Γ , podemos obtener que $A \cong 0,895521874$.

4. Sea y el precio de venta de un producto, expresado en euros, siendo x la demanda del mismo, se verifica que: $(y - xe^x)dx + xdy = 0$. Determinar el precio en función de la



demanda, sabiendo que si la demanda es de 4 unidades, el precio unitario de venta es de 15 euros. (Tómese $e^4 = 55$).

Solución.-

La ecuación propuesta es diferencial exacta pues $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, luego:

$$f(x, y) = \int (y - xe^x) dx = xy - xe^x + e^x + C(y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x + C'(y) = x \rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = K.$$

Luego $f(x, y) = xy - xe^x + e^x + K = 0$.

Para las condiciones dadas: $4 \cdot 15 - 4 \cdot e^4 + e^4 + K = 0 \rightarrow K = 105$. Despejando y , tendremos:

$$y = \frac{e^x(x-1) - 105}{x}$$

5. Encontrar un factor integrante en la siguiente ecuación diferencial: $x^2 dy + 3yxdx = 0$

Solución.-

Admite un factor integrante dependiente de x ya que $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ depende

sólo de x . Se tendrá: $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{1}{x} \rightarrow \ln \mu(x) = \ln x \rightarrow \mu(x) = x$.

PROBLEMA NÚMERO 1.

Utilizando necesariamente coordenadas polares, en todo el desarrollo, calcular el valor de la siguiente integral $I = \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, donde el recinto R está definido por:

$$x^2 + (y-1)^2 \geq 1; x^2 + y^2 - 1 \leq 0; x \geq 0; y \geq 0.$$

Solución.-

El recinto R en coordenadas polares sería (ver figura adjunta):

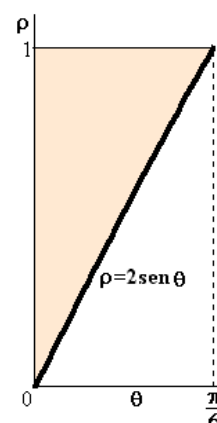
$$\rho^2 \cos^2 \theta + (\rho \sin \theta - 1)^2 \geq 1 \leftrightarrow \rho^2 - 2\rho \sin \theta \geq 0 \leftrightarrow \rho \geq 2 \sin \theta$$

$$\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 1 \leq 0 \leftrightarrow \rho^2 \leq 1 \leftrightarrow \rho \leq 1$$

Es decir $0 \leq 2 \sin \theta \leq \rho \leq 1$, de donde también deducimos que

$$0 \leq \sin \theta \leq \frac{1}{2} \leftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$$

Con lo que la integral queda:



$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_{2 \sin \theta}^1 \rho^2 d\rho &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} [\rho^3]_{2 \sin \theta}^1 d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - 8 \sin^3 \theta) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - 8 \sin \theta + 8 \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \left[\theta + 8 \cos \theta - \frac{8}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{6} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} - 8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{\pi + 18\sqrt{3} - 32}{18} \end{aligned}$$



PROBLEMA NÚMERO 2.

Sea y el ingreso semanal por la venta de x unidades de un producto. Se sabe que la tasa a la que cambia y respecto a x , viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy + x^2}$.

Hállese x en función de y , sabiendo que cuando se venden 2 unidades semanales el ingreso es de 10 euros.

Solución.-

La ecuación diferencial es homogénea. Haciendo el cambio $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux \rightarrow dy = xdu + udx$. Sustituyendo en la ecuación y simplificando, queda la ecuación en variables separadas:

$\frac{1}{x}dx + \left(1 + \frac{1}{u}\right)du = 0$ que integrada da $\ln x + u + \ln u = C$ y deshaciendo el cambio:

$\ln x + \frac{y}{x} + \ln \frac{y}{x} = C$. Para las condiciones dadas: $5 + \ln 10 = C$. Así pues:

$$\ln x + \frac{y}{x} + \ln \frac{y}{x} = 5 + \ln 10, \text{ que puede escribirse de la forma: } y = 10e^{5 - \frac{y}{x}}$$