



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.  
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

**PRUEBA PERSONAL SEPTIEMBRE 2004 (Ex. Ordinario)**

**PRIMERA PARTE: Problemas**

**PROBLEMA NÚMERO 1.**

Utilizando necesariamente coordenadas polares, en todo el desarrollo, calcular cuales serán tanto los límites de integración, como la expresión de la función subintegral, en la siguiente integral que inicialmente aparece en coordenadas cartesianas,

$I = \iint_R f(x,y) dx dy$  donde el recinto R está definido por:

$$y \leq 1; y \geq x; y \geq -x$$

**Solución.-**

El recinto está dibujado en la figura adjunta. Las coordenadas polares  $(\theta, \rho)$  de un punto cualquiera de dicho recinto varían de la siguiente forma:

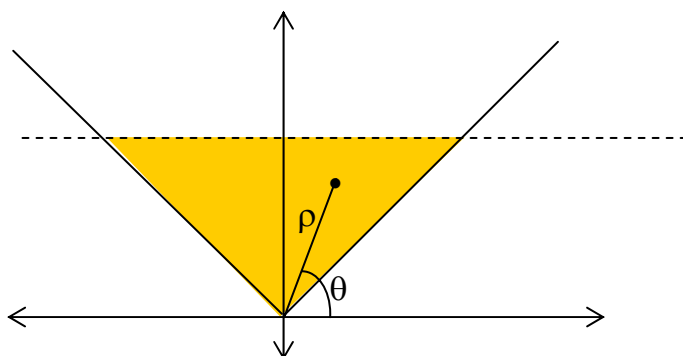
$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta}$$

La transformación a polares:

$$\left. \begin{array}{l} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{array} \right\} \text{ cuyo valor absoluto del}$$

Jacobiano  $|J| = \rho$ . Luego la integral queda:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho$$



**PROBLEMA NÚMERO 2.**

Sabiendo que  $y_1$  e  $y_2$  son dos variables económicas interrelacionadas, obtener la solución general del siguiente sistema lineal completo de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{array}{l} y'_1 = 4y_1 + 7y_2 + 31 \\ y'_2 = y_1 - 2y_2 + 4 \end{array} \right\} \text{ siendo } \left. \begin{array}{l} y_1(0) = 7 \\ y_2(0) = 10 \end{array} \right\}$$

**Solución.-**

Buscamos primeramente una solución particular del sistema completo: sean  $y_1 = A$ ,  $y_2 = B$  (constantes indeterminadas). Se cumplirá:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 4A + 7B + 31 \\ 0 = A - 2B + 4 \end{array} \right\} \text{ de donde se obtiene } A = -6, B = -1.$$

Buscamos ahora la solución general del sistema homogéneo:

El polinomio característico:  $\begin{vmatrix} 4-t & 7 \\ 1 & -2-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t - 15$ , que igualado a cero da las soluciones:

$$t_1 = 5, t_2 = -3. \text{ Los vectores propios: para } t_1 = 5 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow x_1 = 7x_2 \rightarrow \text{v.p.} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$



para  $t_2 = -3 \rightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow x_1 = -x_2 \rightarrow \text{v.p.} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Luego la solución general del

sistema homogéneo sería  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x}$  y la del sistema completo:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para las condiciones dadas  $\left. \begin{matrix} y_1(0) = 7 \\ y_2(0) = 10 \end{matrix} \right\}$  se obtiene el sistema  $\left. \begin{matrix} 7A + B = 13 \\ A - B = 11 \end{matrix} \right\}$  que proporciona

$A = 3, B = -8$ , luego la solución pedida es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5x} - 8 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3x} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{matrix} y_1 = 21e^{5x} - 8e^{-3x} - 6 \\ y_2 = 3e^{5x} + 8e^{-3x} - 1 \end{matrix}$$

## SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Estudiar el carácter de la siguiente serie  $1 - \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{27}{8} + \dots$

**Solución.-**

El término general de la serie es  $\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ . Puesto que no tiende a cero, la serie será divergente.

2. Sea  $y$  el coste de producir  $x$  unidades de un cierto producto. Se sabe que la tasa a la que cambia el coste, respecto al número de unidades fabricadas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y+1}{x^3+2}$ . Hallar el coste en función del número de unidades producidas, sabiendo que cuando se fabrican dos unidades el coste es de 10 euros.

**Solución.-**

Puede comprobarse que la ecuación  $(3x^2y+1)dx + (x^3+2)dy = 0$  es diferencial exacta, luego  $\int (3x^2y+1)dx = x^3y + x + C(y) \rightarrow x^3 + C'(y) = x^3 + 2 \rightarrow C'(y) = 2 \rightarrow C(y) = 2y + C$ .

Luego la solución es:  $x^3y + x + 2y + C = 0 \leftrightarrow y = \frac{-x-C}{x^3+2}$ . Para la condición dada:

$$10 = \frac{-2-C}{10} \rightarrow C = -102, \text{ de donde queda: } \boxed{y = \frac{-x+102}{x^3+2}}$$

3. Calcule la expresión que convierte la siguiente ecuación diferencial  $y^3xdy + \frac{1}{2}y^4dx = 0$  en una ecuación diferencial total exacta.

**Solución.-**

Llamando  $P = \frac{1}{2}y^4$  y  $Q = y^3x$ , se tiene que  $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{1}{x}$ , es decir, depende sólo de  $x$ .

Luego hay un factor integrante  $\mu$ , que depende de  $x$ .



Se tiene:  $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{x} \rightarrow \ln \mu = \ln x \rightarrow \boxed{\mu = x}$

4. Se sabe que  $t$  días después del 20 de diciembre, el precio de la docena de ostras en las pescaderías de Madrid es de  $p(t) = t^2 - t + \frac{113}{3}$  euros. Se pide calcular cual será el precio medio de la docena de ostras entre los días 21 y 23 de diciembre.

**Solución.-**

$$\text{Precio medio} = \frac{1}{3-1} \int_1^3 \left( t^2 - t + \frac{113}{3} \right) dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{113}{3}t \right]_1^3 = 40 \text{ €}.$$

5. Calcular el valor de la siguiente integral :  $I = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} (4-x)^{\frac{5}{2}} dx$ .

**Solución.-**

Podemos convertirla en una integral del tipo  $\beta$  mediante el cambio  $x = 4t \rightarrow I =$

$$= \int_0^1 4^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} 4^{\frac{5}{2}} (1-t)^{\frac{5}{2}} \cdot 4 \cdot dt = 4^5 \beta\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = 4^5 \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)} = 4^5 \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{120} = 12 \pi.$$