

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.

PRUEBA PERSONAL SEPTIEMBRE 2004 (Ex. Reserva)

PRIMERA PARTE: Problemas

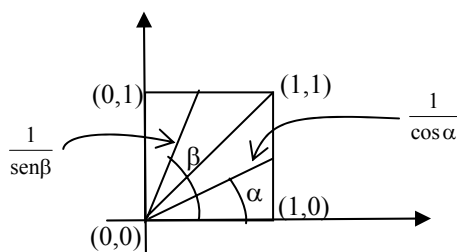
PROBLEMA NÚMERO 1.

Utilizando necesariamente **coordenadas polares**, en todo el desarrollo, calcular cuales serán tanto los límites de integración, como la expresión de la función subintegral, en la siguiente integral que inicialmente aparece en coordenadas cartesianas:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy.$$

Solución.-

El recinto de integración es el cuadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1). Consideremos los dos triángulos en que es dividido por la diagonal que une (0,0) y (1,1):



En el primer triángulo, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ y $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$; en el segundo triángulo, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin \theta}$. Luego la integral quedaría:

$$I = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{1/\cos \theta} \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/\sin \theta} \rho f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\rho$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ y'_2 &= 3y_1 - 5y_2 + 3y_3 \\ y'_3 &= 6y_1 - 6y_2 + 4y_3 \end{aligned} \right\}$$

Solución.-

Los valores propios son 4 y -2 (doble) y los correspondientes vectores propios son:

para 4: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; para -2: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La solución general: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4x} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2x} + C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2x}$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Se sabe que t horas después de la medianoche, la temperatura en el mes de septiembre de una región de Galicia es de $f(t) = 10 + 4t - \frac{3}{10}t^2$. Calcular cual es la temperatura media en dicha región entre las 9:00 AM y el mediodía.

Solución.-

$$TM = \frac{1}{12-9} \int_9^{12} \left(10 + 4t - \frac{3}{10}t^2 \right) dt = \frac{1}{3} \left[10t + 2t^2 - \frac{1}{10}t^3 \right]_9^{12} = 18,7^\circ\text{C}$$

2. Estudiar el carácter de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{na^n}$, $a > 0$.

Solución.-

$$\text{Aplicamos el criterio de D'Alembert: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)a^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{na^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)^2+1]n}{a(n+1)(n^2+1)} = \frac{1}{a}.$$

Hay tres casos:

- si $0 < a < 1 \rightarrow$ DIVERGENTE

- si $a > 1 \rightarrow$ CONVERGENTE

- si $a = 1 \rightarrow$ DIVERGENTE, por que el término general $\frac{n^2+1}{n} \rightarrow \infty$.

3. Calcular la integral $I = \int_0^1 x^a (\ln x)^b dx$, mediante el cambio: $\ln x = -\frac{t}{a+1}$, siendo b un número natural.

Solución.-

Según el valor de a , pueden darse varios casos:

- caso $a > -1$: entonces, si $x = 0 \rightarrow t = +\infty$ y si $x = 1 \rightarrow t = 0$. La integral queda:

$$I = - \int_{+\infty}^0 e^{-\frac{at}{a+1}} \left(\frac{-t}{a+1} \right)^b \frac{1}{a+1} e^{-\frac{t}{a+1}} dt = - \left(\frac{-1}{a+1} \right)^{b+1} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^b dt = \left(\frac{-1}{a+1} \right)^{b+1} \Gamma(b+1) = \frac{(-1)^b \cdot b!}{(a+1)^{b+1}}$$

- caso $a < -1$: entonces, si $x = 0 \rightarrow t = -\infty$ y si $x = 1 \rightarrow t = 0$. La integral queda:

$$I = - \left(\frac{1}{a+1} \right)^{b+1} \int_{-\infty}^0 e^{-t} (-t)^b dt = - \left(\frac{1}{a+1} \right)^{b+1} \int_0^{+\infty} e^t t^b dt, \text{ y esta integral es divergente.}$$

4. El precio de venta y de un producto, respecto a la cantidad demandada x , cambia con la razón expresada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy+24x}{x^2+16}$. Obtener el precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 7,5 euros/unidad, la cantidad demandada es de 4 unidades.

Solución.-

Podemos escribir la ecuación: $(2xy + 24x)dx + (x^2 + 16)dy = 0$, que es diferencial exacta, como puede comprobarse. Así pues: $\int (2xy + 24x)dx = x^2y + 12x^2 + C(y)$. Derivando

respecto de y : $x^2 + C'(y) = x^2 + 16 \rightarrow C'(y) = 16 \rightarrow C(y) = 16y + C$. Luego, la solución general:

$$x^2y + 12x^2 + 16y + C = 0 \leftrightarrow y = \frac{-12x^2 - C}{x^2 + 16}. \text{ Sustituyendo los valores dados, se obtiene}$$

$C = -432$. La solución es:

$$y = \frac{-12x^2 + 432}{x^2 + 16}$$

5. Encontrar el factor integrante que convierte la siguiente ecuación diferencial en una ecuación diferencial exacta: $y^3tdy + \frac{1}{2}y^4dt = 0$.

Solución.-

La ecuación es de la forma $Pdy + Qdt = 0$, y se cumple que $\frac{\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial t}}{P} = \frac{1}{t}$, que depende sólo de t . Luego hay un factor integrante que depende de t . Será:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{t} \rightarrow \ln \mu = \ln t \rightarrow \mu = t$$