



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.

PRUEBA PERSONAL. Enero 2005

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

Utilizando necesariamente coordenadas cilíndricas, en todo el desarrollo, y siendo R el cilindro de base el círculo de radio 1 (centrado en el origen de coordenadas) y de altura 3, calcular el valor de la siguiente integral que inicialmente aparece en coordenadas cartesianas:

$$\iiint_R dx dy dz$$

Nota: Las coordenadas cilíndricas de un punto (x,y,z) son (r,α,z). Siendo (r,α) las coordenadas polares de (x,y)

Solución.-

La transformación de coordenadas cartesianas a cilíndricas viene dada por las

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \\ z = z \end{array} \right\} \text{cuyo jacobiano vale } r. \text{ El cilindro } R \text{ viene determinado por } 0 \leq r \leq 1;$$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi$; $0 \leq z \leq 3$. Luego la integral sería:

$$\int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^3 dz = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 \cdot 2\pi \cdot 3 = 3\pi$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

En las ecuaciones lineales en diferencias, tenemos el modelo de la telaraña, que se refiere a la versión discreta del modelo de ajuste del precio de un bien en el mercado. En base a ello y haciendo uso de los siguientes datos para el modelo de la telaraña:

$$\begin{array}{l} D_t = 5 - 3P_t \\ S_t = -2 + P_{t-1} \end{array} \quad \text{siendo } P_0 = 4$$

Se pide calcular:

- 1) La trayectoria temporal del **precio**
- 2) La tendencia del precio **a largo plazo**
- 3) La **representación gráfica** de la solución del modelo

Solución.-

1) Igualando las expresiones de la oferta y de la demanda, se obtiene la ecuación en diferencias: $3P_t + P_{t-1} = 7$. La ecuación característica de la ecuación homogénea es $3\lambda + 1 = 0$

$\rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$, luego la solución general de la ecuación homogénea es $P_t = C \left(-\frac{1}{3} \right)^t$; por otra

parte, una solución particular de la ecuación completa se obtiene haciendo $P_t = A \rightarrow 3A + A = 7 \rightarrow A = \frac{7}{4}$. Luego la solución general de la ecuación completa es

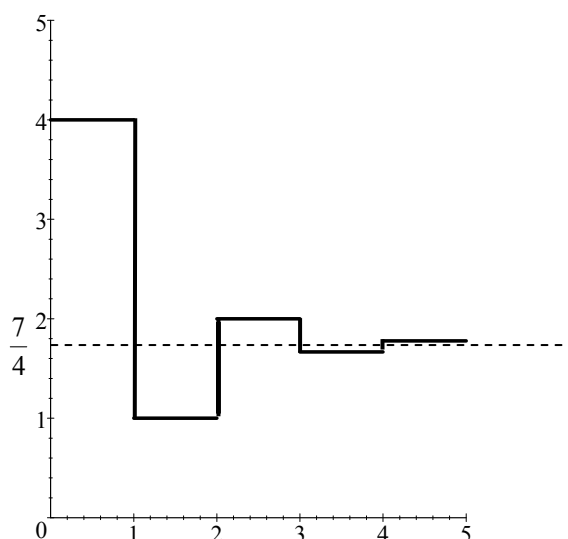
$P_t = C \left(-\frac{1}{3} \right)^t + \frac{7}{4}$. Para $t = 0$, se obtiene $4 = C + \frac{7}{4} \rightarrow C = \frac{9}{4}$ de donde la trayectoria temporal

del precio es $P_t = \frac{9}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^t + \frac{7}{4}$.



2) Haciendo que $t \rightarrow \infty$, se obtiene que $P_t \rightarrow \frac{7}{4}$

3)



SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Determinar el carácter de la siguiente serie: $\frac{3}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{3}{2^5} + \frac{3}{2^7} + \frac{3}{2^9} + \dots$

Solución.-

Se trata de la serie geométrica de término general $a_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$. Como $r = \frac{1}{4} < 1$, la

serie es convergente. Su suma vale $S = \frac{a}{1-r} = \frac{3/2}{1-1/4} = 2$

2. Obtener la solución de la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$

Solución.-

$$A = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1} = (\text{inmediata}) = \arctan(x-1) + C.$$

3. Calcular el valor de la siguiente integral euleriana: $B = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^3} dx$

Solución.-

El cambio de variable $x = \sqrt[3]{t} \rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \rightarrow B = \frac{1}{3} \int_0^1 t \sqrt{1-t} \cdot t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{\frac{1}{3}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt =$

$$= \frac{1}{3} \beta\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} = \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{11}{6} \cdot \frac{5}{6} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{55 \Gamma\left(\frac{5}{6}\right)}$$

4. En un mercado en competencia se conoce la **función de oferta** $S = -5 + p$, y la



función de demanda $D = 10 - 3p$. Se pide calcular la expresión temporal del precio, sabiendo que el ritmo de variación del precio en el tiempo es igual al exceso de demanda sobre la oferta. Se sabe que el precio inicial es de 20 u.m.

Solución.-

De acuerdo con el enunciado, $\frac{dp}{dt} = p' = (10 - 3p) - (-5 + p) \Leftrightarrow p' + 4p = 15$, que es una ecuación diferencial lineal. Ecuación característica $t + 4 = 0 \rightarrow t = -4$ luego la solución general de la ecuación homogénea es $p = C \cdot e^{-4t}$; por otra parte, una solución particular de la ecuación completa se obtiene haciendo $p = A \rightarrow 4A = 15 \rightarrow A = \frac{15}{4}$. Luego la solución

general de la ecuación completa es $p = C \cdot e^{-4t} + \frac{15}{4}$. Para $t = 0$ se obtiene $20 = C + \frac{15}{4} \rightarrow C = \frac{65}{4}$. Así pues, la expresión temporal del precio sería: $p = \frac{65}{4} \cdot e^{-4t} + \frac{15}{4}$.

5. La tasa a la que cambia el **precio de venta, y**, de un producto, respecto a su **demanda, x**, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x^2 + xy)}{x^2 + y^2}$. Calcular el

precio en función de la demanda, sabiendo que cuando el precio es de 5 euros, la demanda es de 15 unidades.

Solución.-

Escribiendo la ecuación de la forma $2(x^2 + xy)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$, podemos comprobar que es diferencial exacta, luego: $\int 2(x^2 + xy)dx = \frac{2}{3}x^3 + x^2y + C(y)$ y derivando

respecto a y, se debe cumplir: $x^2 + C'(y) = x^2 + y^2 \rightarrow C'(y) = y^2 \rightarrow C(y) = \frac{1}{3}y^3 - C$. La

solución general es pues: $\frac{2}{3}x^3 + x^2y + \frac{1}{3}y^3 = C$. Para las condiciones dadas:

$$\frac{2}{3} \cdot 3375 + 225 \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 125 = \frac{10250}{3} = C, \text{ de donde la solución: } 2x^3 + 3x^2y + y^3 = 10250$$