



FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.
PRUEBA PERSONAL. Septiembre 2005

PRIMERA PARTE: Problemas
PROBLEMA NÚMERO 1.

Dada la integral $I = \iint_R \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, y siendo R el recinto definido por:

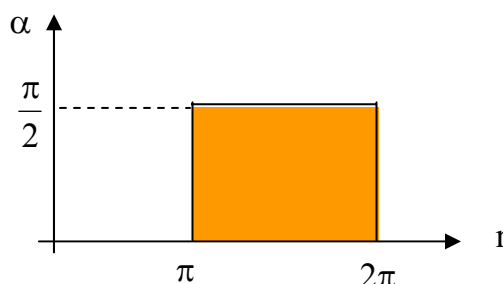
$$\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad \text{Se pide :}$$

- 1) Efectuando necesariamente el cambio a coordenadas polares, **dibujar el nuevo recinto R'** en las nuevas coordenadas.
- 2) Calcular el valor de la integral dada I

Solución.-

1) El recinto en coordenadas polares sería $\begin{cases} \pi^2 \leq r^2 \leq 4\pi^2 \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ o equivalentemente

$\begin{cases} \pi \leq r \leq 2\pi \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ que se trata de un rectángulo en unos ejes (r, α) :



$$\begin{aligned} 2) \text{ La integral queda: } & \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_{\pi}^{2\pi} r \cdot \sin r \cdot dr = (\text{por partes}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-r \cos r \right]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} \cos r \cdot dr d\alpha = \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-3\pi) d\alpha = \frac{-3\pi^2}{2} \end{aligned}$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

En las ecuaciones lineales **en diferencias**, tenemos el modelo de la telaraña, que se refiere a la versión discreta del modelo de ajuste del precio de un bien en el mercado. En base a ello y haciendo uso de las siguientes ecuaciones para el **modelo de la telaraña**:

$$D_t = 100 - 2P_t$$

$$S_t = -20 + 3P_{t-1}$$

- Se pide calcular
- 1) El valor de equilibrio del precio
 - 2) Comprobar si es estable o inestable
 - 3) Suponiendo que el valor inicial del precio es $P_0 = 25$, calcular los valores numéricos de p_t hasta $t = 4$.



Solución.-

1) Igualando las expresiones de la oferta y de la demanda, se obtiene la ecuación en diferencias: $2P_t + 3P_{t-1} = 120$. La ecuación característica de la ecuación homogénea es $2\lambda + 3 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$, luego la solución general de la ecuación homogénea es $P_t = C\left(-\frac{3}{2}\right)^t$; por otra parte, una solución particular de la ecuación completa se obtiene haciendo $P_t = A \rightarrow 2A + 3A = 120 \rightarrow A = 24$. Luego la solución general de la ecuación completa es $P_t = C\left(-\frac{3}{2}\right)^t + 24$, que es el valor de equilibrio del precio.

2) Puesto que $\left|-\frac{3}{2}\right| > 1$, el precio es inestable

3) Para $t = 0$, se obtiene $25 = k + 24$ de donde la trayectoria temporal del precio es $P_t = \left(-\frac{3}{2}\right)^t + 24$. Se tiene entonces: $P(1) = 22,5$; $P(2) = 26,25$; $P(3) = 20,625$; $P(4) = 29,0625$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

- Una plaza de toros abre sus puertas a las 13 horas. Los aficionados entran en ella a razón de: $-8(t+1)^3 + 108(t+1)^2$ aficionados por hora, t horas después de la apertura de la plaza. ¿Cuántos aficionados entrarán entre las 15 horas y las 17 horas, que es la hora de comienzo de la corrida?

Solución.-

La respuesta la proporciona la integral:

$$\int_2^4 [-8(t+1)^3 + 108(t+1)^2] dt = 2440$$

- Obtener la solución de la siguiente integral indefinida: $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-3}}$

Solución.-

Multiplicando numerador y denominador del integrando por $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}$, la integral queda: $\int \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-3}}{6} dx = (inmediata) = \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x-3)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$

- Sea y , en unidades de 10.000 euros, el **beneficio neto semanal** obtenido por un comerciante cuando invierte x miles de euros en **publicidad**. La tasa a la que cambia el beneficio respecto a

la cantidad empleada en inversión viene dada por la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - y}{x - 4y}$.

Hallar la **expresión que relaciona ambas variables**, sabiendo que cuando se gasta 10.000 euros semanales en publicidad el beneficio es de 200.000 euros.

Solución.-

Escribimos la ecuación en la forma: $(3x^2 - y)dx + (-x + 4y)dy = 0$, pudiéndose comprobar que es diferencial exacta. Tenemos pues: $f(x, y) = \int (3x^2 - y)dx = x^3 - xy + C(y)$,

de donde $\frac{df}{dy} = -x + C'(y) = -x + 4y \Rightarrow C'(y) = 4y \Rightarrow C(y) = 2y^2 + C$. Por tanto la solución es:

$x^3 - xy + 2y^2 = C$ y puesto que para $x = 10 \rightarrow y = 20$, sustituyendo se obtiene que $C = 1600$, de donde:



$$x^3 - xy + 2y^2 = 1600$$

4. La **evolución** de las **ventas** de cierto producto **en el tiempo** es proporcional a la función :

$f(t) = e^{2t-100}$. Si la constante de proporcionalidad es $\frac{1}{3}$, estúdiase la trayectoria de la función de ventas.

Solución.-

La evolución de las ventas sería: $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}e^{2t-100}$ de donde integrando se obtiene que

$$V = \frac{1}{6}e^{2t-100} + C.$$

5. Estudie el carácter de la siguiente serie : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Ln}$. (siendo L = logaritmo neperiano)

Solución.-

Como $\frac{1}{Ln} > \frac{1}{n}$ y la serie armónica $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, entonces la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{Ln}$ es divergente.

(Nota: para que exista la serie dada, debe considerarse el sumatorio desde $n = 2$)