

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.

PRUEBA PERSONAL. Septiembre 2005. Reserva

PRIMERA PARTE: Problemas
PROBLEMA NÚMERO 1.

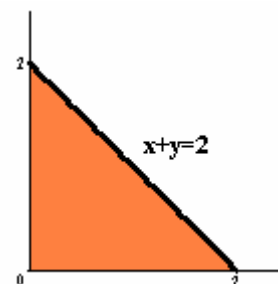
Resolver la integral doble $A = \iint_R e^{\frac{x^2-y^2}{x-y}} dx dy$ efectuando el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} u &= y - x \\ v &= x + y \end{aligned}$$

Asimismo R es la región del primer cuadrante limitada por la recta $x + y = 2$.

Solución.-

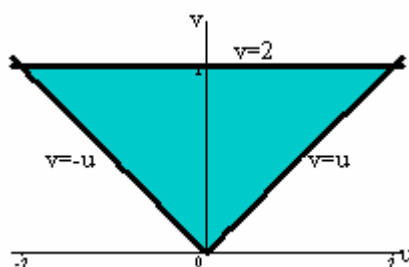
El dominio R cuya representación gráfica podemos ver a la derecha, puede expresarse:



Despejando x e y del cambio propuesto:
$$\begin{cases} x = \frac{v-u}{2} \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}$$
 con lo que el recinto R se convierte en:

$$0 \leq \frac{u+v}{2} \leq 2 - \frac{v-u}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq u+v \leq 4-v+u \leq 4 \Leftrightarrow -u \leq v \leq 4-v \leq 4-u$$

cuya representación es:



El valor absoluto del jacobiano es: $\text{abs} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, de donde la integral queda:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^2 dv \int_{-v}^v e^v du = \int_0^2 v e^v dv = (\text{por partes}) = [v e^v]_0^2 - \int_0^2 e^v dv = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Obtener la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}y'_1 &= 3y_1 - y_2 + y_3 \\y'_2 &= -y_1 + 5y_2 - y_3 \\y'_3 &= y_1 - y_2 + 3y_3\end{aligned}$$

Solución.-

La matriz del sistema, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, tiene como polinomio característico $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 = (x - 2)(x - 3)(x - 6)$. Los vectores propios serían:

$$\text{Para } x = 2: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Para } x = 3: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Para } x = 6: \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego la solución general es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x}$$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Demuestre si es convergente o no la siguiente serie numérica: $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

Respuesta.-

Para $n \geq 2$ se tiene que $n e^{-n^2} = \frac{n}{e^{n^2}} \leq \frac{n}{e^{2n}} < \frac{1}{e^n}$, y como la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n}$ es

convergente, la serie dada también lo será.

(Resultado análogo se puede obtener por el criterio logarítmico o por el de D'Alembert)

2. Si p es un número real mayor que uno, demostrar que $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$.

Demostrar también que $\Gamma(1) = 1$, y deducir finalmente que si n es un número natural, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$

Respuesta:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = (\text{por partes}) = \left[-x^{p-1} e^{-x} \right]_0^{\infty} + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx = (p-1) \cdot \Gamma(p-1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

Demostraremos por inducción que, si n es un número natural, $\Gamma(n) = (n-1)!$:

Es cierta para $n = 1$.

Supongamos que es cierta para $n = p-1$, es decir que $\Gamma(p-1) = (p-2)!$; entonces $\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1) = (p-1)(p-2)! = (p-1)!$.

Luego es cierta $\forall n$.

3. Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

Respuesta.-

Haremos el cambio $\tan \frac{x}{2} = t$, de donde $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Se tiene:

$$A = \int \frac{2}{1+t^2+2t+1-t^2} dt = \int \frac{1}{1+t} dt = \ln|1+t| + C = \ln\left|1 + \tan \frac{x}{2}\right| + C$$

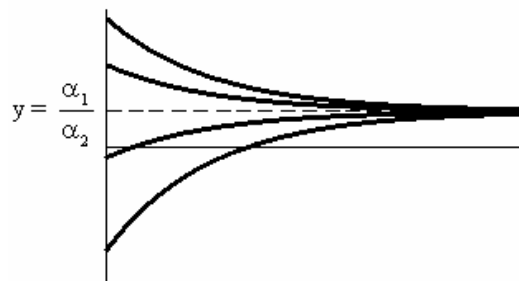
4. Obtenga y represente gráficamente las trayectorias temporales referidas a un modelo uniecuacional con trayectoria de crecimiento asintótico.

Respuesta:

El crecimiento o variación de una función y que depende de la variable temporal t , se expresa mediante su derivada $y' = \frac{dy}{dt}$. Decimos que es asintótico si $\frac{dy}{dt} = \alpha_1 - \alpha_2 y$, con $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.

Se tiene que $\frac{dy}{\alpha_1 - \alpha_2 y} = dt$, e integrando:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\alpha_2} \ln|\alpha_1 - \alpha_2 y| &= t + C \Rightarrow \ln|\alpha_1 - \alpha_2 y| = \\ &= -\alpha_2 t - \alpha_2 C \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 y = K e^{-\alpha_2 t}, \text{ siendo } K = \\ e^{-\alpha_2 C} \Rightarrow y &= \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{K}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t}. \end{aligned}$$



(depende de la constante K), tiende asintóticamente, cuando $t \rightarrow \infty$, a la recta $y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

5. Señalemos por y , en euros, el ingreso que se obtiene al vender x unidades de un producto. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene dada por la siguiente ecuación diferencial: $y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0$

Obtener y , en función de x , sabiendo que la venta de 1 unidad produce un ingreso de 1 euro.

Respuesta.-

$$y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)dy = x^2 dx; \text{ integrando: } \frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} + C; \text{ puesto que } y(1) = 1 \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} + C \rightarrow C = -1, \text{ luego la solución es: } \frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} - 1 \Leftrightarrow y^3 - 3y - x^3 + 3 = 0.$$