



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Enero 2006. Primera semana

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial

$$(3x + 4y + 1)dy + (2x + 3y + 1)dx = 0$$

Solución.-

Puede comprobarse que es una ecuación diferencial exacta. Se tendrá pues:

$$f(x, y) = \int (3x + 4y + 1)dy = 3xy + 2y^2 + y + C(x)$$

Derivando respecto a x, deberá ser:

$$3y + C'(x) = 2x + 3y + 1 \rightarrow C'(x) = 2x + 1 \rightarrow C(x) = x^2 + x + C.$$

Luego la solución es: $3xy + 2y^2 + y + x^2 + x + C = 0$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Calcular el área que encierran las curvas :

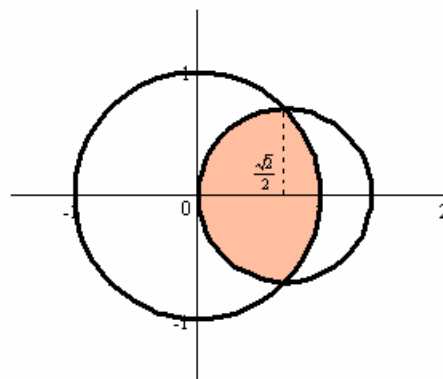
$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad y \quad x^2 - \sqrt{2}x + y^2 \leq 0$$

Solución.-

Las curvas son las dos circunferencias representadas en la figura [de centro (0,0) y radio 1, y de centro $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ respectivamente] cuyos puntos de corte, obtenidos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - \sqrt{2}x + y^2 = 0 \end{cases}$$

son $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



El área pedida será por tanto: $A = 2 \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\sqrt{2}x - x^2} dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \right)$

El radicando de la primera integral podemos escribirlo $\sqrt{2}x - x^2 = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
 $= \frac{1}{2} \left[1 - (\sqrt{2}x - 1)^2 \right]$. Con el cambio $(\sqrt{2}x - 1) = \text{sent}$, se obtiene que para $x = 0 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$ y para



$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow t = 0; \text{ además } dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t dt, \text{ con lo que } \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\sqrt{2}x - x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{\pi}{8}. \text{ [Obsérvese que esta integral es precisamente el área del}$$

cuadrante de círculo de radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$]

Para la segunda integral, con el cambio $x = \sin t$, se obtiene que para $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ y para $x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; además $dx = \cos t dt$, con lo que $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi - 2}{8}.$$

Así pues, $A = 2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi - 2}{8} \right) = \frac{\pi - 1}{2}$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones teórico-prácticas

1. Estudiar el carácter de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

Solución.-

Por ejemplo, por el criterio logarítmico: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{1}{a_n} \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{e^{n^2}}{n} \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{n^2} - \ln n}{\ln n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - \ln n}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\ln n} - 1 \right) = \infty > 1 \rightarrow \text{la serie es convergente.}$$

2. Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \sqrt{3x^4 - 2x^2} dx$

Solución.-

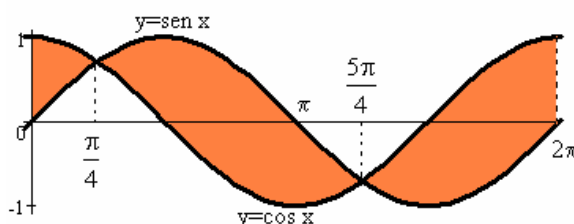
$$A = \int x(3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{6} \int 6x(3x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} dx = (\text{inmediata}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{(3x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{(3x^2 - 2)^{\frac{3}{2}}}{9} + C$$

3. Calcular el área de la figura delimitada entre las funciones $y = \sin x$ e $y = \cos x$, en el intervalo $[0, 2\pi]$

Solución.-

Las funciones dadas se cortan para los valores de $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{5\pi}{4}$ y de la figura se puede deducir que el área pedida es el doble que la comprendida entre esos valores. Así pues:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = -2 \left[\cos x + \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \\ &= 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$



4 Sea x el número de unidades fabricadas e y el coste de producción. Sabiendo que la tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades producidas viene dado por la siguiente ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - x + \frac{9}{x}$. Se pide calcular el coste en función de las unidades producidas, en el caso en que el coste es de 12 unidades monetarias cuando el número de unidades fabricadas es 3.

Solución.-

Se trata de resolver la ecuación diferencial lineal dada. Busquemos dos funciones u y v tales que $y = u \cdot v$ sea solución: Tendremos:

$$u'v + uv' = \frac{u \cdot v}{x} - x + \frac{9}{x} \Leftrightarrow u'v + u \left(v' - \frac{v}{x} \right) = -x + \frac{9}{x} \quad (\text{I}). \text{Elijamos } v \text{ tal que } v' - \frac{v}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{v'}{v} = \frac{1}{x} \rightarrow v = x. \text{ Sustituyendo en (I): } u'x = -x + \frac{9}{x} \Leftrightarrow u' = -1 + \frac{9}{x^2} \Leftrightarrow u = -x - \frac{9}{x} + C. \text{ Así}$$

pues la solución general es $y = -x^2 + Cx - 9$. Para las condiciones dadas: $12 = 3C - 18 \Leftrightarrow C = 10$, luego: $y = -x^2 + 10x - 9$.

5. La razón a la que está disminuyendo la demanda de un producto, expresada en unidades por año, viene dada por la siguiente función exponencial $50.000e^{-0,2t}$. Y donde $t = 0$ corresponde al uno de enero de 2006. Hállese la razón a la que cambia la demanda cuando $t = 5$. ¿Cuántas unidades se demandarán entre los años 2006 y 2015, ambos inclusive?.

Nota: Tómese $e^{-1} = 0,37$ y $e^{-2} = 0,135$

Solución.-

Para $t = 5$, la razón a la que disminuye la demanda será: $50000e^{-0,2 \cdot 5} = 50000 \cdot e^{-1} \cong 18500$ unidades/año.

Las unidades demandadas entre los años 2006 y 2015 serán:

$$\int_0^{10} 50000 \cdot e^{-0,2t} dt = -\frac{50000}{0,2} \left[e^{-0,2t} \right]_0^{10} = -250000(e^{-2} - 1) \cong 216250$$