

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.  
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

**PRUEBA PERSONAL. Febrero 2006. Segunda semana**

**PRIMERA PARTE: Problemas**

**PROBLEMA NÚMERO 1.**

Obtener la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$xy' + y - y^2 \ln x = 0$$

**Solución.-**

Es una ecuación de Bernoulli. Dividiendo los dos miembros por  $y^2$ , queda:  $xy^{-2}y' + y^{-1} - \ln x = 0$ ; hacemos el cambio  $y^{-1} = z \rightarrow -y^{-2}y' = z'$  y sustituyendo se obtiene:  $-xz' + z - \ln x = 0$ , que es una ecuación lineal. Hacemos  $z = u \cdot v \rightarrow z' = u'v + uv'$  de donde sustituyendo y sacando factor común  $u$ :  $-xu'v - u(xv' - v) - \ln x = 0$ ; haciendo  $xv' - v = 0 \rightarrow v = x$ , y sustituyendo:  $-x^2u' - \ln x = 0 \rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} \ln x \rightarrow u = \int \left(-\frac{1}{x^2} \ln x\right) dx =$  (por partes)  $= \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C$ .

Así pues,  $z = \ln x + 1 + Cx$ , de donde  $y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}$

**PROBLEMA NÚMERO 2.**

Calcular la integral doble de la función:

$z = x^2 + y^2$  sobre el recinto A definido por las desigualdades :

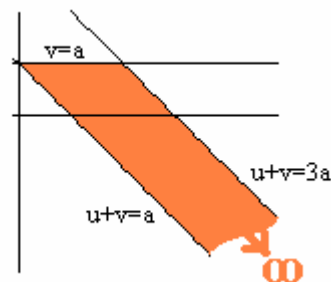
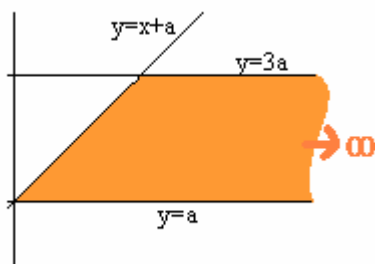
$y \leq x + a$ ,  $y \geq a$ ,  $y \leq 3a$ , con  $a > 0$ ; mediante el cambio de variable:

$u = x$  y  $v = y - x$ .

Dibujar necesariamente los recintos en las variables  $x$  e  $y$ , y asimismo en las variables  $u$  y  $v$

**Solución.-**

El recinto, representado en las coordenadas  $(x, y)$  y en las coordenadas  $(u, v)$

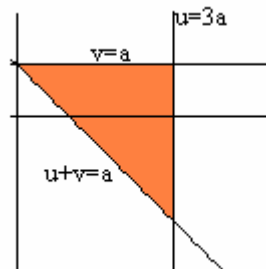
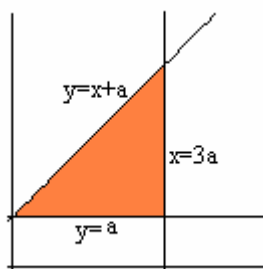


En coordenadas  $(x, y)$

En coordenadas  $(u, v)$

es un recinto ilimitado, comprendido entre dos paralelas. La integral es infinito.

Puede ser que haya un error en el enunciado y que donde pone  $y \leq 3a$ , deba poner  $x \leq 3a$ . En ese caso los recintos respectivamente son:



En coordenadas (x, y)

En coordenadas (u, v)

Del cambio propuesto se deduce :

$\left. \begin{matrix} x = u \\ y = u + v \end{matrix} \right\}$  y el jacobiano:  $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ ; además  $x^2 + y^2 = 2u^2 + 2uv + v^2$ , de donde la integral:

$$\int_0^{3a} du \int_{a-u}^a (2u^2 + 2uv + v^2) dv = \int_0^{3a} \left[ 2u^2 v + uv^2 + \frac{v^3}{3} \right]_{a-u}^a du = \int_0^{3a} \left( \frac{4}{3} u^3 + au^2 + a^2 u \right) du = \left[ \frac{u^4}{3} + \frac{au^3}{3} + \frac{a^2 u^2}{2} \right]_0^{3a} = \frac{81}{2} a^4$$

## SEGUNDA PARTE: Cuestiones teórico-prácticas

1. Estudiar el carácter de la siguiente serie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}$$

**Solución.-**

Por el criterio de d'Alembert,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n!}{(n+1)^n} : \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1$ ,

luego la serie es convergente.

2. Resolver la siguiente integral indefinida :  $A = \int 2x^2 (7 - 3x^3)^{12} dx$

**Solución.-**

$$A = -\frac{2}{9} \int -9x^2 (7 - 3x^3)^{12} dx = (\text{inmediata}) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{(7 - 3x^3)^{13}}{13} + C.$$

3. Calcular el área de la figura limitada por la curva  $y = \ln x$ , el eje  $OX$ , y la recta  $x = e$

**Solución.-**

$y = \ln x$  corta al eje  $OX$  en  $x = 1$ , luego la integral es:

$$\int_1^e \ln x dx = (\text{por partes}) = [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx = e - e + 1 = 1.$$

4 Sea  $x$  la demanda de un cierto producto e  $y$  el precio unitario de venta. Se sabe que el ritmo al que cambia el precio respecto a la demanda, viene expresado por la siguiente

ecuación diferencial  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x - \frac{120}{x}$ . Se pide calcular el precio en función de la

demanda, sabiendo que el precio unitario de venta es de 3 euros cuando la demanda es de 9 unidades.



### Solución.-

La ecuación diferencial es lineal. Mediante el cambio  $y = u \cdot v$  y procediendo como en el problema 1, se obtiene que  $v = x$ . Sustituyendo queda:

$$u'x - x + \frac{120}{x^2} = 0 \rightarrow u' = 1 - \frac{120}{x^2} \rightarrow u = x + \frac{120}{x} + C. \text{ Por tanto } y = x^2 + Cx + 120. \text{ Haciendo}$$

$x = 9, y = 3$ , se obtiene que  $C = -22$ . Luego el precio en función de la demanda:

$$y = x^2 - 22x + 120$$

**5 Después de  $x$  horas en el trabajo, un obrero puede producir  $200xe^{-0,5x}$  unidades por hora. Sabiendo que el obrero entra a trabajar a las ocho de la mañana, se pregunta ¿cuántas unidades producirá entre las 10 de la mañana y el mediodía?.**

**Nota:** Tómese  $e^{-1} = 0,37$  y  $e^{-2} = 0,135$ .

### Solución.-

$$\int_2^4 200xe^{-\frac{1}{2}x} dx = (\text{por partes}) = 200 \left( \left[ -2xe^{-\frac{1}{2}x} \right]_2^4 + 2 \int_2^4 e^{-\frac{1}{2}x} dx \right) =$$
$$200 \left( -8e^{-2} + 4e^{-1} - 4 \left[ e^{-\frac{1}{2}x} \right]_2^4 \right) = 200(-12e^{-2} + 8e^{-1}) = (\text{con los datos dados}) = 268.$$