



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.  
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

**PRUEBA PERSONAL. Septiembre 2006 (EX. RES.)**

**PRIMERA PARTE: Problemas**

**PROBLEMA NÚMERO 1.**

**Resolver la siguiente ecuación lineal en diferencias:**

$$y_{x+3} - y_x = 0$$

**Asimismo, obtener de las soluciones obtenidas las que son convergentes si  $x \rightarrow +\infty$**

**Solución.-**

El polinomio característico  $t^3 - 1$  tiene las raíces  $1, \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$ .

La solución general es, por tanto:  $y_x = C_1 + C_2 \cos \frac{2\pi}{3} x + C_3 \sin \frac{2\pi}{3} x$ .

Las únicas soluciones convergentes se obtienen cuando  $C_2 = C_3 = 0$

**PROBLEMA NÚMERO 2.**

**Calcular el área del dominio acotado A que limitan las curvas :**

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad xy^3 = 1, \quad xy^3 = 2$$

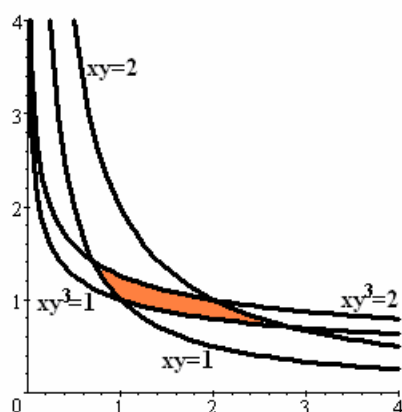
mediante el siguiente cambio de variables:

$$xy = u, \quad xy^3 = v$$

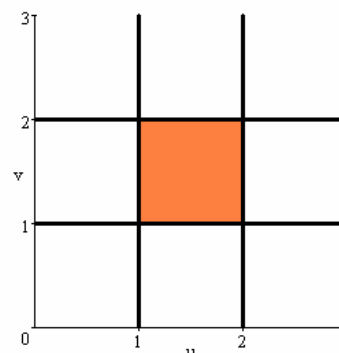
Nota: Dibujar necesariamente el recinto A' correspondientes a las variables  $(u, v)$

**Solución.-**

Efectuado el cambio de variables, las curvas se convierten respectivamente en:  $u = 1$ ,  $u = 2$ ,  $v = 1$ ,  $v = 2$ , con lo que los recintos A y A' son:



Recinto A



Recinto A'

El área pedida puede calcularse mediante la integral doble de la función  $f(x, y) = 1$  en el recinto A. Efectuando el cambio de variable, será:



$$\text{Área} = \iint_A 1 \cdot dx dy = \iint_{A'} 1 \cdot \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv = \int_1^2 du \int_1^2 \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dv$$

Para calcular el jacobiano, despejamos  $x$  e  $y$  del cambio de variables, quedando

$$\left. \begin{aligned} x &= u^{\frac{3}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \\ y &= u^{-\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\}, \quad \text{de donde} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} u^{\frac{3}{2}} v^{-\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2} u^{-\frac{3}{2}} v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}. \quad \text{Luego el área es}$$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 du \int_1^2 \frac{1}{v} dv = \frac{\ln 2}{2}$$

## SEGUNDA PARTE: Cuestiones teórico prácticas

1. Estudiar el carácter de la serie:  $\sum_{n=2}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

**Solución.-**

Aplicamos el criterio de Cauchy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1 = 1 - 1 = 0 < 1$  luego la serie es convergente.

2. Calcular la siguiente integral:  $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

**Solución.-**

Aplicamos la fórmula trigonométrica:  $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$ , luego

$$\text{queda: } A = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \sin x) dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos 2x}{2} - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

3. A partir de la definición de la integral euleriana  $\beta(p,q)$ , demostrar que

$$\beta(p,q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1} (\cos t)^{2q-1} dt$$

**Solución.-**

En la integral euleriana  $\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ , hacemos el cambio  $x = \sin^2 t \rightarrow$

$dx = 2 \sin t \cos t dt$ ; además, si  $x=0 \rightarrow t=0$  y si  $x=1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ . Quedará:

$$\beta(p,q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-2} (\cos t)^{2q-2} \sin t \cos t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2p-1} (\cos t)^{2q-1} dt$$

4. Sea  $y = C(x)$  el coste en euros, de fabricar  $x$  figuras de cerámica. La tasa a la que cambia el coste respecto al número de figuras fabricadas viene dada por la siguiente ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} - 2x(y+1) = 0$ . Hallar el coste en función del número de figuras de cerámica fabricadas, sabiendo que el coste de fabricar 2 unidades es de 109 euros.

(Tómese  $e^4 = 55$ )

**Solución.-**



Escribiendo la ecuación diferencial en la forma  $\frac{1}{y+1} dy = 2x dx$  e integrando, queda:

$$\ln|y+1| = x^2 + C_1 \Leftrightarrow y+1 = Ce^{x^2} \Leftrightarrow y = Ce^{x^2} - 1.$$

Para la condición dada:  $109 = Ce^4 - 1 \Leftrightarrow C = \frac{110}{e^4} = 2$ . El coste pedido es:

$$y = 2e^{x^2} - 1$$

**5. El coste marginal de enlatar un cierto tipo de mejillones está dado por :  $200 - 30\sqrt{x}$ , siendo  $x$  el número de latas expresado en miles, y el coste en euros. ¿Cuál será el aumento total en el coste de la producción, si ésta aumenta de 4.000 a 25.000 latas?.**

**Solución.-**

$$\int_4^{25} (200 - 30\sqrt{x}) dx = \left[ 200x - 20x^{\frac{3}{2}} \right]_4^{25} = 1860 \text{ €}.$$