



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Febrero 2007. Segunda semana

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

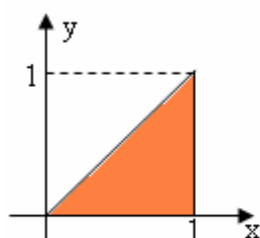
Calcular el valor de la Integral : $I = \iint_R \frac{dx dy}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ mediante el cambio de variables

$x = u^2, y = v^2$, siendo el recinto $R = \{(x,y)/ 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq x\}$

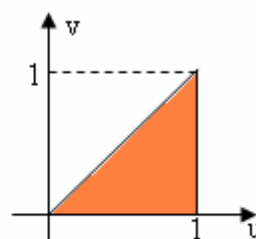
Nota: Dibujar necesariamente los recintos R y R' en ambos sistemas de variables.

Solución.-

Para que el cambio de variable sea biyectivo tomaremos $u \geq 0, v \geq 0$, con lo que el recinto $R' = \{(u,v)/ 0 \leq u^2 \leq 1; 0 \leq v^2 \leq u^2\} = \{(u,v)/ 0 \leq u \leq 1; 0 \leq v \leq u\}$, luego tiene la misma forma que R .



Recinto R



Recinto R'

El jacobiano: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \end{vmatrix} = 4uv$.

$$\begin{aligned} \text{Luego la integral queda: } I &= 4 \int_0^1 u du \int_0^u \frac{v}{u+v} dv = 4 \int_0^1 u du \int_0^u \left(1 - \frac{u}{u+v}\right) dv = \\ &= 4 \int_0^1 u du [v - u \ln(u+v)]_0^u = 4 \int_0^1 u du (u - u \ln(2u) + u \ln u) = 4 \int_0^1 u^2 (1 - \ln 2) du = 4(1 - \ln 2) \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{4}{3} (1 - \ln 2) \end{aligned}$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Dada la expresión $y_x = c_1 + c_2 2^x + c_3 x 2^x$.

Se pide: Obtener la ecuación en diferencias finitas, lineal homogénea, de la cual la expresión dada es solución.

Solución.-

De acuerdo con la forma de la solución general dada, las raíces del polinomio característico deben $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$ (doble), es decir el polinomio característico sería $(r-1)(r-2)^2 = r^3 - 5r^2 + 8r - 4$, de donde la ecuación sería:

$$y_{x+3} - 5y_{x+2} + 8y_{x+1} - 4y_x = 0$$

SEGUNDA PARTE. cuestiones teórico prácticas

1. Para qué valor de x converge la siguiente serie: $A = \sum_{n=1}^{\infty} n!(x-a)^n$

Solución.-

Para $x = a$ la serie es nula.

Para $x \neq a$, el término general $n!(x-a)^n$ tiende a infinito, luego la serie es divergente.

2. Resolver la siguiente integral : $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

Solución.-

Cambio de variable $-\ln x = t \Leftrightarrow x = e^{-t} \rightarrow dx = -e^{-t}$. Además $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=\infty \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{cases}$. La

$$\text{integral queda : } I = \int_{\infty}^0 \frac{-e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

3. Hallar el área de la figura comprendida entre las siguientes curvas: $y = \frac{1}{1+x^2}$,

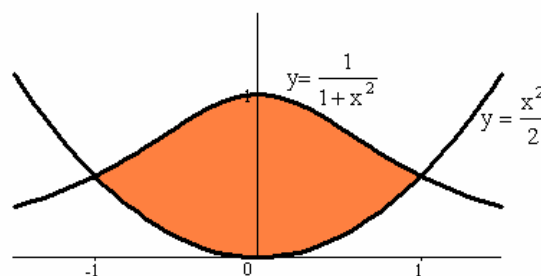
$$y = \frac{x^2}{2}.$$

Solución.-

Resolviendo el sistema formado por ambas curvas obtenemos los puntos de corte para los valores $x_0 = -1$, $x_1 = 1$. El área es:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\arctg x - \frac{x^3}{6} \right]_{-1}^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3\pi - 2}{6}$$



4. Estudiar el caracter de la siguiente integral impropia: $B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{e^x + e^{2x}} dx$

Solución.-

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2x}}{e^x + e^{2x}} dx = (\text{simplificando}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} dx = (\text{inmediata}) = \left[\ln(1 + e^x) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \infty \rightarrow$$

\rightarrow divergente.

5. La tasa a la que cambia el precio de venta, y , de un producto, respecto a su demanda, x , viene dada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 1}$$

Hallar el precio en función de la demanda, en el caso de que aquél sea de 4 euros cuando la demanda es de 2 unidades.

Solución.-

Escribiendo la ecuación en la forma $(3x^2 + 2xy)dx + (x^2 + 1) dy = 0$ podemos comprobar que es diferencial exacta. Se tendrá:



$$\int (3x^2 + 2xy)dx = x^3 + x^2y + C(y)$$

Derivando respecto de y, será: $x^2 + C'(y) = x^2 + 1 \rightarrow C'(y) = 1 \rightarrow C(y) = y - C$.

Luego la solución general será: $x^3 + x^2y + y = C$

Sustituyendo $x = 2$, $y = 4$ se obtiene que $C = 28$. Despejando y se tiene finalmente:

$$y = \frac{28 - x^3}{1 + x^2}$$