



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Enero 2007. Primera semana

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA 1.-

Las coordenadas esféricas de un punto (x, y, z) son (ρ, α, ψ) . se pide:

1) Expresar las relaciones de las coordenadas cartesianas (x, y, z) en función de las esféricas

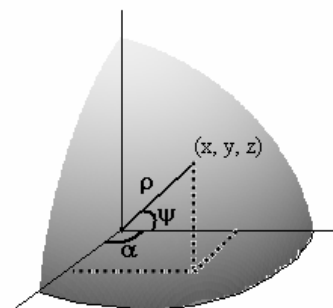
2) Calcular el Jacobiano de la transformación de las coordenadas cartesianas en función de las esféricas

3) Calcular el volumen de una esfera de radio r , mediante el cambio de variables a coordenadas esféricas.

Solución.-

1)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \psi \cos \alpha \\ y = \rho \cos \psi \sin \alpha \\ z = \rho \sin \psi \end{cases}$$



2)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \alpha, \psi)} = \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \psi & -\rho \sin \alpha \cos \psi & -\rho \cos \alpha \sin \psi \\ \sin \alpha \cos \psi & \rho \cos \alpha \cos \psi & -\rho \sin \alpha \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & \rho \cos \psi \end{vmatrix} = \rho^2 \cos \psi$$

3) $V = 8 \iiint_R dx dy dz$, donde R es el recinto $\{(x, y, z) / x^2 + y^2 + z^2 \leq r, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

Efectuando el cambio a coordenadas esféricas, sería:

$$V = 8 \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi = 8 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^r \left[\alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin \psi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

PROBLEMA 2.-

Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + 2y_x = x$$

con las condiciones iniciales: $y_0 = 1, y_2 = 0$

Solución.-

La ecuación característica $r^2 - 2r + 2 = 0$ tiene las soluciones $r_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

y $r_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. Por tanto la solución general de la ecuación homogénea será:

$$(\sqrt{2})^x \left(c_1 \cos \frac{\pi x}{4} + c_2 \sin \frac{\pi x}{4} \right)$$

Una solución particular de la completa será de la forma $k_1 + k_2 x$. Sustituyendo en la ecuación dada:

$$k_1 + k_2(x+2) - 2[k_1 + k_2(x+1)] + 2(k_1 + k_2 x) = x$$



Identificando coeficientes se obtiene que $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$. Así pues la solución general de la ecuación dada será:

$$y_x = (\sqrt{2})^x \left(c_1 \cos \frac{\pi x}{4} + c_2 \sin \frac{\pi x}{4} \right) + x$$

Para las condiciones iniciales dadas se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ (\sqrt{2})^2 \left(c_1 \cos \frac{2\pi}{4} + c_2 \sin \frac{2\pi}{4} \right) + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{array} \right\}$$

Así pues la solución que se pide es:

$$y_x = (\sqrt{2})^x \left(\cos \frac{\pi x}{4} - \sin \frac{\pi x}{4} \right) + x$$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones teórico-prácticas

1.- Para qué valores de x converge la siguiente serie: $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$

Solución.-

Estudiemos en primer lugar la serie para valores positivos de x . Aplicaremos el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^n}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{x^{n-1}}{n3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{xn}{3(n+1)} = \frac{x}{3}$$

Se tienen entonces los siguientes casos:

- si $0 < x < 3 \rightarrow$ la serie es convergente
- si $x > 3 \rightarrow$ la serie es divergente
- si $x = 3$ la serie es entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente por tratarse de la serie armónica.

Para valores negativos de x la serie es alternada

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{3} \right)^{n-1}$$

Se tienen los siguientes casos:

- si $-3 < x < 0 \rightarrow$ es convergente pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{3} \right)^{n-1} = 0$
- si $x < -3 \rightarrow$ es divergente pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{|x|}{3} \right)^{n-1} = \infty$
- si $x = -3$ la serie es $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, que es convergente pues $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

2.- Resolver la siguiente integral: $I = \int_0^{\infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x^3} dx$

Solución.-

Hacemos el cambio de variable $x^3 = t \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{3}} \rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt$. La integral queda:

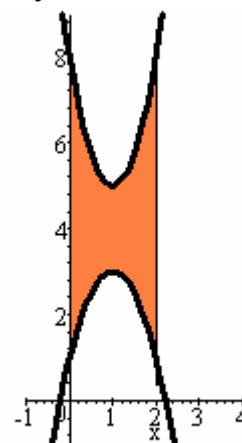
$$I = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{6}} \cdot e^{-t} t^{-\frac{2}{3}} dt = \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

3.- Calcular el área correspondiente al siguiente recinto: $y \leq 3x^2 - 6x + 8$, $y \geq -2x^2 + 4x + 1$, $x \geq 0$, $x \leq 2$.

Solución.-

El recinto está representado en la figura. Su área es:

$$\begin{aligned} \int_0^2 [(3x^2 - 6x + 8) - (-2x^2 + 4x + 1)] dx &= \int_0^2 (5x^2 - 10x + 7) dx = \\ &= \left[\frac{5x^3}{3} - 5x^2 + 7x \right]_0^2 = \frac{22}{3} \end{aligned}$$



4.- Estudiar el carácter de la siguiente integral impropia

$$A = \int_a^{\infty} \frac{1}{x^k} dx \quad (a > 0)$$

efectuando el estudio para $k=1$ y $k \neq -1$

Solución.-

• caso $k = 1$: $\int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^h \frac{1}{x} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} [\ln|x|]_a^h = \lim_{h \rightarrow \infty} (\ln h - \ln a) = \infty \rightarrow$ integral

divergente

• caso $k \neq 1$: $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^k} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_a^h \frac{1}{x^k} dx = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1-k}}{1-k} \right]_a^h = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{h^{1-k}}{1-k} - \frac{a^{1-k}}{1-k} \right]$.

Hay dos subcasos:

$k > 1$: entonces $\lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{h^{1-k}}{1-k} - \frac{a^{1-k}}{1-k} \right] = -\frac{a^{1-k}}{1-k} \rightarrow$ integral convergente

$k < 1$: entonces $\lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{h^{1-k}}{1-k} - \frac{a^{1-k}}{1-k} \right] = \infty \rightarrow$ integral divergente

5.- Sea x el precio unitario de venta de un producto, e y su oferta. La razón a la que cambia la oferta respecto al precio, viene dada por la siguiente ecuación diferencial :

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 2y. \text{ Hallar la oferta en función del precio, sabiendo que si el precio unitario es de } 1,5 \text{ euros, la demanda es de 56 unidades. (Nota : Tómesese } e^3 = 20)$$

Solución.-

Podemos integrar la ecuación diferencial como lineal. Hacemos el cambio $y = u \cdot v$. Sustituyendo:



$$u'v + uv' = 4x + 2uv \quad \Leftrightarrow \quad u(v' - 2v) = 4x - u'v \quad (I). \text{ Hacemos } v' - 2v = 0 \Leftrightarrow \frac{v'}{v} = 2.$$

Integrando: $\ln|v| = 2x \rightarrow v = e^{2x}$. Sustituyendo en (I) queda: $4x - u'e^{2x} = 0 \Leftrightarrow u' = 4xe^{-2x}$.

Integrando (por partes):

$$u = -2xe^{-2x} + \int 2e^{-2x} dx = -2xe^{-2x} - e^{-2x} + C.$$

Así pues $y = e^{2x}(-2xe^{-2x} - e^{-2x} + C) = -2x - 1 + Ce^{2x}$.

Para las condiciones dadas: $56 = -3 - 1 + C \cdot e^3 = -4 + 20C \Leftrightarrow C = 3$

Luego la oferta en función del precio es: $y = -2x - 1 + 3 \cdot e^{2x}$.