



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Septiembre 2007. Examen ordinario

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

Calcular el valor de la integral $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ (Los límites de integración son 1 e ∞)

1º). Para los valores de $p > 1$

2º). Demostrar que para $p \leq 1$ la integral no es convergente

3ª). Representar la función $\frac{1}{x^p}$ para los distintos valores de $p > 0$

Solución.-

1º) Para valores de $p > 1$, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}$

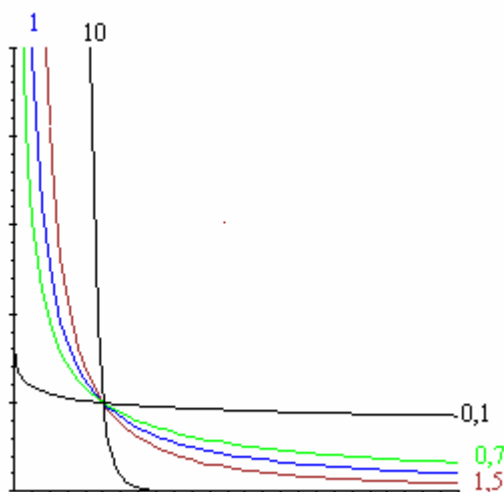
2º) Para $p = 1 \rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty \rightarrow$ la integral es divergente.

Para $p < 1$, y siendo $x > 1 \rightarrow x > x^p \rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x^p}$, luego, por el criterio de comparación,

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ será divergente.

3º) Representaremos $y = \frac{1}{x^p}$ para $x > 0$ (para $x < 0$ no siempre existe). Para cualquier

valor de $p > 0$, dicha función pasa por el punto (1, 0), tiene por asíntota vertical $x = 0$ y por asíntota horizontal $y = 0$. Al aumentar p la función se acerca más a la asíntota horizontal y se separa más de la vertical, y recíprocamente. En la figura pueden verse las distintas gráficas para $p = 0,1$; $p = 0,7$; $p = 1$; $p = 1,5$ y $p = 10$.





PROBLEMA NÚMERO 2.

Dada la ecuación diferencial $xdy + (y - \cos x)dx = 0$, compruebe que la función

$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

Solución.-

Puesto que $dy = \frac{x \cos x dx - \operatorname{sen} x dx}{x^2}$, sustituyendo en la ecuación diferencial,

$$x \frac{x \cos x dx - \operatorname{sen} x dx}{x^2} + \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x \right) dx = \cos x dx - \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx + \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx - \cos x dx = 0$$

como se quería demostrar.

SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Dada la serie: $\frac{2}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \dots$ Se pide:

- Hallar las primeras cinco sumas parciales
- El término general de la sucesión de las sumas parciales

a) Sumando una unidad a cada denominador se obtiene la sucesión de los cuadrados de los números pares: 4, 16, 36, ... Así pues, la sucesión cuyas sumas parciales definen la serie,

tiene por término general $a_n = \frac{2}{4n^2 - 1}$. Se tendrá:

$$S_1 = \frac{2}{3}; \quad S_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; \quad S_3 = \frac{4}{5} + \frac{2}{35} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}; \quad S_4 = \frac{6}{7} + \frac{2}{63} = \frac{56}{63} = \frac{8}{9};$$

$$S_5 = \frac{8}{9} + \frac{2}{99} = \frac{90}{99} = \frac{10}{11}.$$

b) Para las cinco primeras sumas parciales se cumple que $S_n = \frac{2n}{2n+1}$. Veamos que es ese el término general: descomponiendo en suma de fracciones simples

$$\frac{2}{4n^2 - 1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

y dando valores a n:

$$a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

$$a_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

.....

$$a_n = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

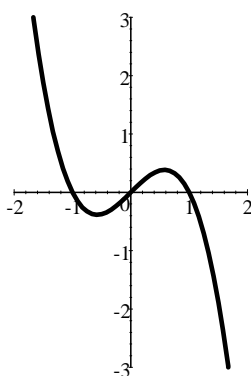
Sumando miembro a miembro, se anula cada sustraendo con el minuendo siguiente:

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \quad \text{que es lo que queríamos demostrar.}$$

2. Calcular el área del conjunto comprendido entre las gráficas de las funciones: $y = x - x^3$, e $y = 0$. (Representar necesariamente $y = x - x^3$)

Solución.-

La función se anula para $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ (son las soluciones de la ecuación $x - x^3 = 0$). La derivada $y' = 1 - 3x^2$ se anula para los valores de $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$; sustituyendo en la segunda derivada $y'' = -6x$, se obtiene que en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ la función toma un mínimo relativo y en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ toma un máximo relativo. Por otra parte, $y''(0) = 0$, $y''' = -6$, luego en $x = 0$, la función tiene un punto de inflexión. La gráfica:



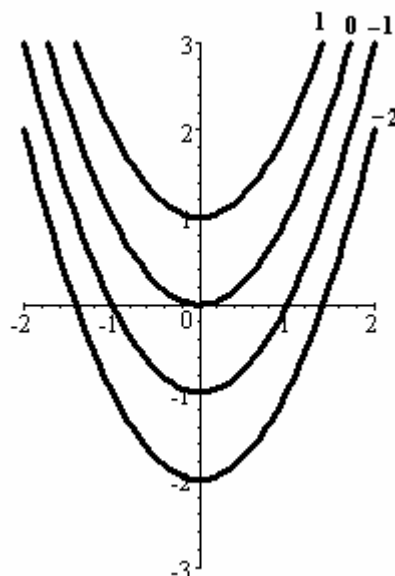
El área pedida es $\left| \int_{-1}^0 (x - x^3) dx \right| + \int_0^1 (x - x^3) dx =$ (puesto que la función es impar, su gráfica es simétrica respecto el origen) $= 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$

3. Hallar la ecuación del haz de curvas tales que la pendiente en cualquier punto de ellas es igual al doble de la abscisa del punto. Asimismo representar gráficamente el haz de curvas resultantes.

Solución.-

Tales curvas verifican $y' = 2x \rightarrow y = \int 2x dx = x^2 + C$.

Sus gráficas son parábolas. En la figura se han representado para $C = -2$, $C = -1$, $C = 0$, $C = 1$.





4. En el estadio Santiago Bernabeu, se abren sus puertas a las 4 de la tarde. Los aficionados entran en el estadio a razón de: $-10(1+t^3)+90(1+t)^2$ aficionados por hora, t horas después de la apertura del estadio.

Se pide: ¿ Cuantos aficionados entrarán hasta las 18 horas, cuando está previsto el comienzo del partido?.

Solución.-

$$\int_0^2 (-10(1+t^3)+90(1+t)^2) dt = \left[-10\left(t + \frac{t^4}{4}\right) + 90\frac{(1+t)^3}{3} \right]_0^2 = -60 + 810 - 30 = 720$$

5. Sean y las unidades monetarias del ingreso por venta de x unidades de un producto. La tasa de cambio del ingreso respecto a las unidades vendidas, lo representa la siguiente **ecuación diferencial**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{24-x^2}{x}. \text{ El ingreso es de 21 unidades monetarias cuando se venden 5 unidades.}$$

Hallar el ingreso en función de las ventas.

Solución.-

Hacemos el cambio $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux \rightarrow y' = u'x + u$. Sustituyendo:

$$u'x + u = u + \frac{24-x^2}{x} \Leftrightarrow u'x = \frac{24-x^2}{x} \Leftrightarrow u' = \frac{24}{x^2} - 1. \text{ Integrando: } u = -\frac{24}{x} - x + C.$$

$$\text{Deshaciendo el cambio: } \frac{y}{x} = -\frac{24}{x} - x + C \Leftrightarrow y = -24 - x^2 + Cx. \text{ Para } x = 5 \rightarrow 21 = -49 + 5C$$

$$\rightarrow C = \frac{70}{5} = 14. \text{ Así pues el ingreso en función de las ventas:}$$

$$y = -x^2 + 14x - 24$$