



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.  
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

**PRUEBA PERSONAL. Septiembre 2007. Examen reserva**

**PRIMERA PARTE: Problemas**

**PROBLEMA NÚMERO 1.**

**Estudiar la convergencia de la integral**  $I = \int_0^{\infty} e^{-px} dx$  (Los límites de integración son 0 e  $\infty$ )

1º). Efectuar el estudio para los valores de  $p > 0$ ,  $p = 0$ , y  $p < 0$

2º). Representar gráficamente la función  $e^{-px}$  para  $p > 0$ , y  $p < 0$

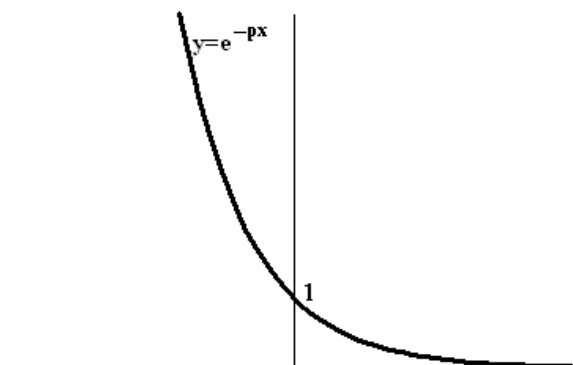
**Solución.-**

1º) Para  $p \neq 0$  se tiene:

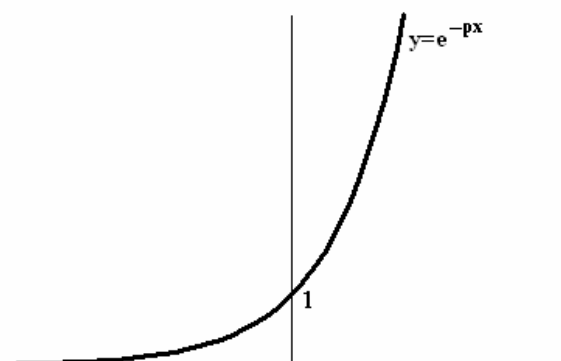
$$\int_0^{\infty} e^{-px} dx = -\frac{1}{p} [e^{-px}]_0^{\infty} = -\frac{1}{p} \left( \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-px} - 1 \right) = \begin{cases} -\frac{1}{p} (0 - 1) = \frac{1}{p}, & \text{si } p > 0 \rightarrow \text{la integral es convergente} \\ \infty, & \text{si } p < 0 \rightarrow \text{la integral es divergente} \end{cases}$$

Para  $p = 0 \rightarrow \int_0^{\infty} dx = [x]_0^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \rightarrow$  la integral es divergente

2º) Para  $p > 0$ , se obtienen curvas que, en general, tienen la forma de la figura, es decir, pasan por el punto (0, 1) y el semieje OX positivo es asíntota horizontal.



Para  $p < 0$ , se obtienen curvas que, en general, tienen la forma de la figura, es decir, pasan por el punto (0, 1) y el semieje OX negativo es asíntota horizontal.





## PROBLEMA NÚMERO 2.

Dada la ecuación diferencial,  $xy' + 1 = e^y$  compruebe que la función  $e^{-y} - Cx = 1$  es una solución particular de la ecuación diferencial dada.

### Solución.-

Despejemos  $y$  de la expresión  $e^{-y} - Cx = 1 \Leftrightarrow e^{-y} = Cx + 1 \Leftrightarrow y = -\ln(Cx + 1)$ .

Derivando:  $y' = \frac{-C}{Cx + 1}$ . Así pues se tendrá:

$$xy' + 1 = \frac{-Cx}{Cx + 1} + 1 = \frac{1}{Cx + 1} = \frac{1}{e^{-y}} = e^y, \text{ como se quería demostrar.}$$

## SEGUNDA PARTE: Cuestiones teórico-prácticas.

1. Dada la serie:  $\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} \dots$  Se pide:

a) Hallar las primeras cinco sumas parciales, y demostrar que es convergente.

b) Hallar la suma de la serie.

### Solución.-

a)

$$S_1 = \frac{2}{10}; S_2 = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} = \frac{22}{100}; S_3 = \frac{22}{100} + \frac{2}{1000} = \frac{222}{1000}; S_4 = \frac{222}{1000} + \frac{2}{10000} = \frac{2222}{10000};$$

$$S_5 = \frac{2222}{10000} + \frac{2}{100000} = \frac{22222}{100000}.$$

se trata de la serie geométrica de razón  $r = \frac{1}{10} < 1$  luego es convergente.

b) Su suma es  $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{2}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{9}$

2. Calcular el valor de la integral  $I = \int_{-1}^1 |3x+1| dx$ . Represente gráficamente la función  $|3x+1|$ .

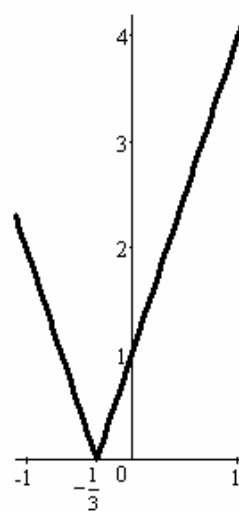
### Solución.-

La función  $f(x) = |3x+1|$ , definida en el intervalo  $[-1, 1]$ ,

puede escribirse  $f(x) = \begin{cases} -3x-1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{3} \\ 3x+1, & -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$  cuya representación

gráfica vemos al margen. Se tendrá:

$$\int_{-1}^1 |3x+1| dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{3}} (-3x-1) dx + \int_{-\frac{1}{3}}^1 (3x+1) dx =$$





$$= \left[ -\frac{3x^2}{2} - x \right]_{-1}^{-\frac{1}{3}} + \left[ \frac{3x^2}{2} + x \right]_{-\frac{1}{3}}^1 = \frac{10}{3}$$

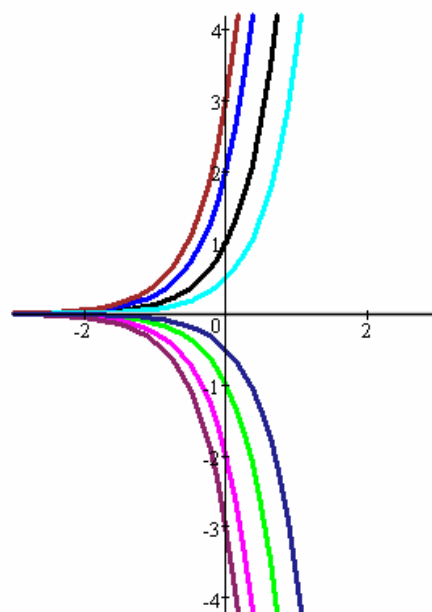
3. Hallar la ecuación del haz de curvas tales que la pendiente en cualquier punto de ellas es igual al doble de la ordenada del punto. Asimismo representar gráficamente el haz de curvas resultantes.

**Solución.-**

Tales curvas verificarán que  $y' = 2y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 2$

$$\Leftrightarrow \ln y = 2x + C \Leftrightarrow (\text{haciendo } e^C = K) \Leftrightarrow y = Ke^{2x}.$$

En la figura adjunta están representadas las curvas resultantes para distintos valores de K. El valor de la ordenada en el origen de cada curva es el correspondiente valor de K. Para  $K = 0$ , se obtiene el eje de abscisas.



4. El supermercado ALDI alquila un almacén para sus productos perecederos, que piensa puede vender a razón de 3.000 kilos por semana. Si adquiere un total de 12.000 kilos, y sabe que el almacenaje le supone un coste de 0,5 euros por kilo y semana, ¿Cuál será el coste total de almacenar dicha cantidad de productos?.

**Solución.-**

Pasadas  $t$  semanas quedan **12000–3000t** kilos, cuyo costo de almacenaje será **(12000 – 3000t)·0,5 € = 6000 – 1500t €** por semana. El coste total, durante las cuatro semanas que durará el almacenaje, será:

$$\int_0^4 (6000 - 1500t) dt = [6000t - 750t^2]_0^4 = 12000 \text{ €}.$$

5. Sea  $y$  la oferta de un producto, cuando se vende cada unidad a  $x$  euros. La razón a la que cambia la oferta respecto al número de unidades vendidas, la expresa la siguiente ecuación diferencial:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$ . Hallar  $y$  en función de  $x$  sabiendo que la oferta es de 660 unidades, cuando el precio unitario de venta es de 100 euros.

**Solución.-**

Hacemos el cambio  $u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux \rightarrow y' = u'x + u$ . Sustituyendo:

$$u'x + u = 1 + u \Leftrightarrow u'x = 1 \Leftrightarrow u' = \frac{1}{x}. \text{ Integrando: } u = \ln x + C. \text{ Desahaciendo el cambio:}$$

$$\frac{y}{x} = \ln x + C \Leftrightarrow y = x \ln x + Cx.$$

Para  $x = 100$ ,  $y = 660 \rightarrow 660 = 100 \ln 100 + 100C \Leftrightarrow C = 6,6 - \ln 100$ . Así pues  $y$  en función de  $x$ :

$$y = x \ln x + (6,6 - \ln 100)x$$