

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Enero 2008. Primera semana

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

Dadas las funciones: $y^2 + 8x = 16$, e $y^2 + x = 36$. Se pide:

- 1) Calcular el área del recinto cerrado que determinan las mencionadas funciones.
- 2) Dibujar necesariamente la gráfica del recinto cerrado.

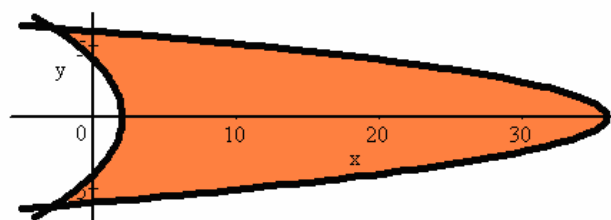
Solución.-

Las funciones son dos parábolas de eje horizontal. Resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones obtenemos los puntos de

intersección: $\left(-\frac{20}{7}, \pm\sqrt{\frac{272}{7}}\right)$. El área pedida

la obtendremos integrando respecto del eje OY:

$$\int_{-\sqrt{\frac{272}{7}}}^{\sqrt{\frac{272}{7}}} \left(36 - y^2 - \frac{16 - y^2}{8}\right) dy, \quad \text{integral que resuelta da: } \frac{544\sqrt{119}}{21}$$



PROBLEMA NÚMERO 2.

Siendo $I = \iint_R xy dx dy$, donde R es el recinto de integración limitado por :

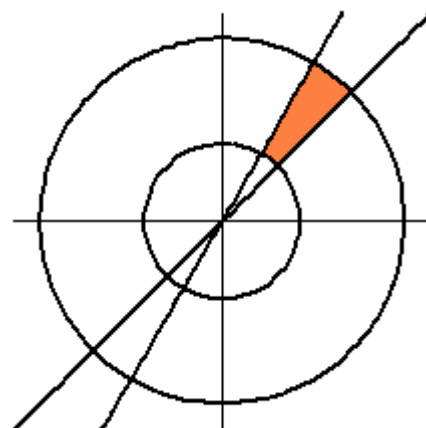
$x^2 + y^2 \leq 49$, $x^2 + y^2 \geq 9$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Se pide:

- 1) Calcular el valor de la integral I , operando necesariamente en coordenadas polares
- 2) Dibujar la gráfica del recinto R

Solución.-

En coordenadas polares, $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$, y sabemos que el valor del jacobiano es ρ . Para determinar el recinto de integración en coordenadas polares, observemos que $x^2 + y^2 = 49$ y $x^2 + y^2 = 9$ son las circunferencias de radios 7 y 3 respectivamente, mientras que las rectas $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$ tienen por pendientes 1 y $\sqrt{3}$, con lo que sus inclinaciones son $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ y $\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, respectivamente. Así pues, el recinto de integración es:

$$3 \leq \rho \leq 7; \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$



La integral quedará: $\int_3^7 \rho^3 d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos x \sin x dx = \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_3^7 \cdot \frac{1}{2} [\sin^2 x]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{145}{2}$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Analizando la posible condición necesaria de convergencia, **estúdiense el carácter**

de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

Solución.-

Llamando $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ tendremos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ es la suma de la serie hipergeométrica $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ que da como resultado $\frac{1}{4}$ (vease la suma de series hipergeométricas en el texto de Balbás). Puesto que la condición necesaria de convergencia es que el término general tienda a cero, al ser $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, la serie dada es divergente.

2. Resolver la siguiente integral : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

Solución.-

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^{-\frac{1}{2}} x \cdot \cos^{\frac{1}{2}} x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{-\frac{1}{2}} x \cdot \cos^{\frac{1}{2}} x \cdot dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) =$$
 (fórmula de los complementos) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

3. La razón a la que varía la **pendiente de la tangente**, en cualquier punto de la gráfica de la función que representa el **coste** de una empresa, es la constante 2. Sabiendo que dicha gráfica pasa por los puntos A(2,12) y B(3,18), hállese la referida función de coste.

Solución.-

Llamando $y = y(x)$ a la función coste, se tendrá: $y'' = 2$. Integrando queda $y' = 2x + C_1$; volviendo a integrar queda $y = x^2 + C_1x + C_2$. Se cumplirá entonces que:
$$\left. \begin{aligned} 12 &= 4 + 2C_1 + C_2 \\ 18 &= 9 + 3C_1 + C_2 \end{aligned} \right\}$$
 sistema que resuelto proporciona $C_1 = 1$ y $C_2 = 6$. La función pedida será:
$$y = x^2 + x + 6$$

4. Dada la ecuación diferencial: $y(1+xy)dx - xdy = 0$, calcule cual es el tipo de Factor Integrante más conveniente para su integración.

Solución.-

Puesto que $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{-1 - 2xy - 1}{y(1+xy)} = \frac{-2}{y}$ que sólo depende de y , el factor integrante más conveniente se obtiene de la ecuación: $\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{y}$. Integrando: $\ln \mu = -2 \ln y \Leftrightarrow$
$$\mu = \frac{1}{y^2}$$

5. Sea $y = I(x)$ expresado en euros, el ingreso obtenido por la venta de x unidades de un cierto producto. Sabiendo que la tasa a la que crece el ingreso respecto al número de unidades vendidas viene dada por la ecuación diferencial: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{45}{x} - x\right)$, hállese y en función de x , sabiendo que la venta de 10 unidades del producto produce unos ingresos de 35 euros.

Solución.-

La ecuación diferencial es lineal. Hacemos el cambio $y = u \cdot v$. Sustituyendo:

$$u'v + uv' = \frac{1}{x}uv - \frac{45}{x} + x \Leftrightarrow \left(u' - \frac{1}{x}u\right)v + uv' = -\frac{45}{x} + x. \text{ Elegimos } u \text{ tal que } u' - \frac{1}{x}u = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{u'}{u} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow u = x. \text{ Sustituyendo: } xv' = -\frac{45}{x} + x \Leftrightarrow v' = -\frac{45}{x^2} + 1 \Leftrightarrow v = \frac{45}{x} + x + C. \text{ Luego}$$

$y = x^2 + Cx + 45$. Como $35 = 100 + 10C + 45 \Leftrightarrow C = -11$. Así pues:

$$y = x^2 - 11x + 45$$