

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Febrero 2008. Segunda semana

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

Hállese el área de la porción de plano comprendida entre el eje **OX**, la curva

$$y = \frac{6a^3}{x^2 + 9a^2} \quad (\text{con } a > 0) \quad \text{y las rectas: } x = -3a, \quad x = 3a.$$

Nota: Dibujar necesariamente el recinto plano en cuestión.

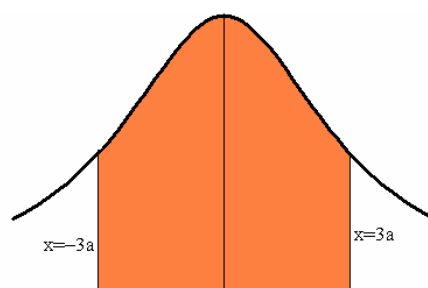
Solución.-

La curva es positiva, simétrica respecto OY, tiende a cero cuando $x \rightarrow \pm\infty$ y para $x = 0$ toma su valor máximo.

El área pedida será $\int_{-3a}^{3a} \frac{6a^3}{x^2 + 9a^2} dx =$ (dividiendo
numerador por denominador $9a^2$) $=$

$$= \frac{6a^3}{3a} \int_{-3a}^{3a} \frac{1}{\left(\frac{x}{3a}\right)^2 + 1} dx = 2a^2 \left[\operatorname{arctg} \frac{x}{3a} \right]_{-3a}^{3a} = 2a^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= a^2 \pi.$$



PROBLEMA NÚMERO 2.

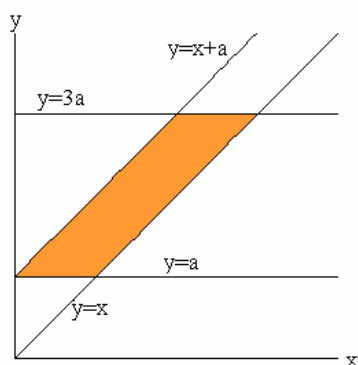
Calcúlese la integral doble de la función $z = x^2 + y^2$, sobre el recinto R definido por $y \geq x$, $y \leq x + a$, $y \geq a$, $y \leq 3a$, con $a > 0$. Utilícese el siguiente cambio de variables: $u = x$, $v = y - x$.

Nota: Necesariamente deberá dibujarse el recinto R en las variables (x, y) , y el recinto S en las variables (u, v)

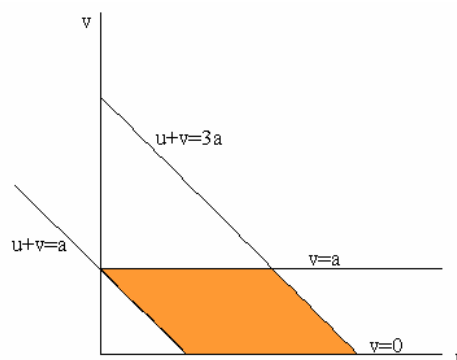
Solución.-

Efectuado el cambio de variables, siendo $\begin{cases} x = u \\ y = u + v \end{cases}$ el recinto estaría determinado por

las desigualdades $v \geq 0$; $v \leq a$; $u + v \geq a$; $u + v \leq 3a$



Recinto R



Recinto S

El jacobiano de la transformación: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. La expresión $z = u^2 + (u+v)^2 = 2u^2 + 2uv + v^2$. La integral sería:

$$\int_0^a \int_{a-v}^{3a-v} (2u^2 + 2uv + v^2) du dv = \int_0^a \left[\frac{2u^3}{3} + u^2 v + uv^2 \right]_{a-v}^{3a-v} dv =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{2(3a-v)^3}{3} + (3a-v)^2 v + (3a-v)v^2 - \frac{2(a-v)^3}{3} - (a-v)^2 v - (a-v)v^2 \right) dv = (\text{simplificando}) =$$

$$= \int_0^a \left(2av^2 - 8a^2 v + \frac{52}{3} a^3 \right) dv = \left[\frac{2av^3}{3} - 4a^2 v^2 + \frac{52}{3} a^3 v \right]_0^a = \frac{2}{3} a^4 - 4a^4 + \frac{52}{3} a^4 = 14a^4$$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Estúdiese el carácter de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{L(n)}$

Solución.- No existe tal serie dado que no está definido su primer término y por tanto ninguno de sus términos.

Nota.- Sí que existiría la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{L(n)}$. Sería divergente porque

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{L(n)} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{n} = \infty$. Es decir, el término general no cumpliría la condición necesaria de convergencia.

2. Calcular el valor de la siguiente integral: $A = \int_0^1 (Lx)^{2n} dx$

Solución.-

Efectuemos el cambio $Lx = -t \leftrightarrow x = e^{-t} \leftrightarrow dx = -e^{-t} dt$. Además si $x = 0 \rightarrow t = \infty$ y si $x = 1 \rightarrow t = 0$, luego $A = - \int_{\infty}^0 t^{2n} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-t} dt = \Gamma(2n+1)$

3. Sea $y = C(x)$ el coste, en euros, de producir x plumas estilográficas. La tasa a la que cambia el coste respecto al número de plumas fabricadas viene dada por la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - 2x(y+1) = 0$. Si el coste de producir 2 unidades es de 109 euros, hállese el coste en función del número de plumas fabricadas. (Tómese $e^4 = 55$)

Solución.-

La ecuación diferencial es de variables separables: $\frac{1}{y+1} dy = 2x dx$. Integrando:

$L(y+1) = x^2 + C$. Haciendo $A = e^C$, podemos escribir la solución $y + 1 = Ae^{x^2}$. Para la condición dada, $109 = A \cdot e^4 - 1 = 55A - 1 \rightarrow A = 2$. Así pues el coste sería: $y = 2e^{x^2} + 1$

4. Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas: $y_{x+2} + 2y_{x+1} + 2y_x = 0$

Solución.-

La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ tiene las soluciones $\lambda = -1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} \pm i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$. Luego la solución de la ecuación en diferencias:

$$y_x = (\sqrt{2})^x \left(C_1 \cos \frac{3\pi x}{4} + C_2 \sin \frac{3\pi x}{4} \right)$$

5. Dada la ecuación diferencial $\frac{y}{x} dx + (y^3 - Lx) dy = 0$. Hallar un Factor Integrante y resolver la ecuación diferencial.

Solución.-

Puesto que $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{x}{y} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \frac{-2}{y}$ sólo depende de y, la ecuación admite un

factor integrante μ dependiente sólo de y, tal que $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2}{y}$, de donde $L\mu = Ly^{-2} \leftrightarrow \mu = y^{-2}$.

Así pues, la ecuación $\frac{1}{xy} dx + \frac{y^3 - Ly}{y^2} dy = 0$ será diferencial exacta. Tendremos

entonces: $f(x,y) = \int \frac{1}{xy} dx = \frac{Lx}{y} + C(y)$. Derivando respecto de y: $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{Lx}{y^2} + C'(y) = \frac{y^3 - Ly}{y^2}$, de donde obtenemos que $C'(y) = y \rightarrow C(y) = \frac{y^2}{2} - C$. La solución general de la

ecuación sería: $\frac{Lx}{y} + \frac{y^2}{2} = C$