

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.
PRUEBA PERSONAL. Septiembre 2008. (Ex. Or)

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

Calcúlese el valor de la integral $I = \iint_R e^{\frac{2x^2+xy-y^2}{x+y}} dx dy$,
siendo R el recinto limitado por las rectas:

$$2x - y = 0, \quad 2x - y = e, \quad x + y = 0, \quad x + y = \pi,$$

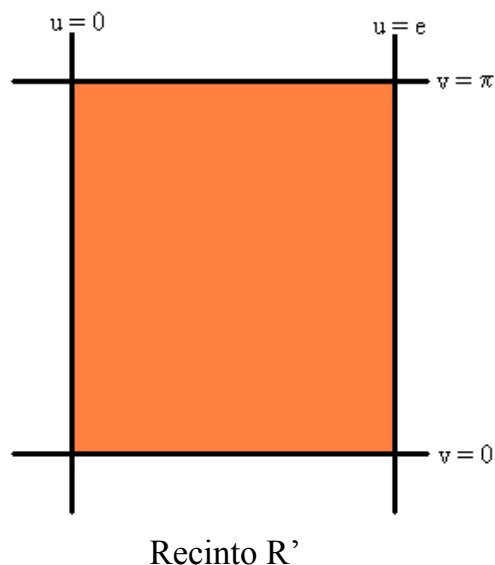
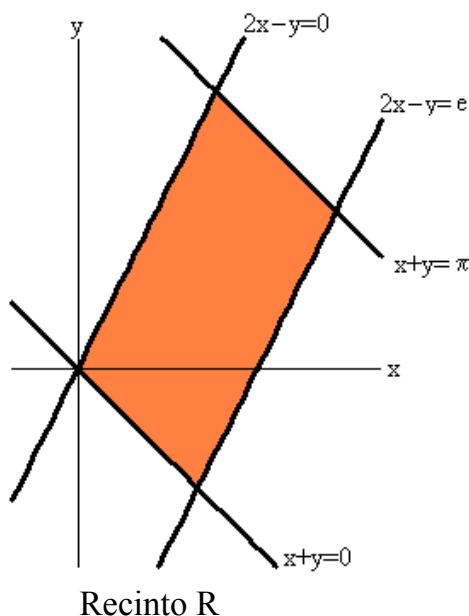
y utilizando necesariamente el cambio de variables dado por:

$$\begin{aligned} u &= 2x - y \\ v &= x + y \end{aligned}$$

Nota: Es obligatorio dibujar los recintos R y R' referidos a las variables (x,y) y (u,v) , respectivamente

Solución.-

Efectuado el cambio de variables, las rectas se convierten respectivamente en: $u = 0$, $u = e$, $v = 0$, $v = \pi$, con lo que los recintos R y R' son:



Despejamos x e y del cambio de variables, quedando

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v \\ y &= -\frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v \end{aligned} \right\}, \text{ de donde}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}. \text{ Luego } I = \frac{1}{3} \iint_{R'} e^{\frac{uv}{v}} du dv = \frac{1}{3} \iint_{R'} e^u du dv = \frac{1}{3} \int_0^e e^u du \int_0^\pi dv = \frac{1}{3} (e^e - 1) \pi$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Pasar a coordenadas polares la ecuación diferencial

$$x^2(xdx + ydy) + y(xdy - ydx) = 0$$

e integrarla. Expresar el resultado final en las variables (x,y) .

Solución.-

En coordenadas polares:

$$x = \rho \cos \theta \rightarrow dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta$$

$$y = \rho \sin \theta \rightarrow dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$\rho^2 \cos^2 \theta [\rho \cos^2 \theta d\rho - \rho^2 \cos \theta \sin \theta d\theta + \rho \sin^2 \theta d\rho + \rho^2 \cos \theta \sin \theta d\theta] + \\ + \rho \sin \theta [\rho \sin \theta \cos \theta d\rho + \rho^2 \cos^2 \theta d\theta - \rho \sin \theta \cos \theta d\rho + \rho^2 \sin^2 \theta d\theta] = 0$$

Simplificando:

$$\rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho d\rho + \rho \sin \theta \cdot \rho^2 d\theta = 0$$

Dividiendo por $\rho^3 \cos^2 \theta$ queda $d\rho + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = 0$ que es una ecuación diferencial de

variables separadas. Integrándola: $\rho + \frac{1}{\cos \theta} = C$. Deshaciendo el cambio:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C$$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Estudie el **carácter** de la siguiente **serie**: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(n-1)^n}$

Solución.-

Puesto que el límite del término general:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{(n-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^n = e^2 > 0$$

la serie es divergente, ya que es condición necesaria para la convergencia que el término general tienda a cero.

2. Obtener la **ecuación de la curva** que pasa por el punto $(2,1)$ y cuya pendiente en un punto cualquiera es $-1\left(1 + \frac{y}{x}\right)$

Solución.-

Debe ser $\frac{dy}{dx} = -1 - \frac{y}{x}$, que es una ecuación diferencial homogénea. Hacemos el cambio

$y = ux \rightarrow dy = udx + xdu$. Sustituyendo en la ecuación y multiplicando por dx :

$$udx + xdu = -(1+u)dx \Leftrightarrow xdu = -(1+2u)dx \Leftrightarrow \frac{1}{1+2u} du = -\frac{1}{x} dx. \text{ Integrando:}$$

$\ln \sqrt{1+2u} = \ln \frac{C}{x} \Leftrightarrow \sqrt{1+2u} = \frac{C}{x}$. Deshaciendo el cambio: $\sqrt{1+\frac{2y}{x}} = \frac{C}{x}$. Por pasar por el punto (2, 1) $\rightarrow \sqrt{1+\frac{2}{2}} = \frac{C}{2} \rightarrow C = 2\sqrt{2}$. Sustituyendo y elevando al cuadrado:

$$1 + \frac{2y}{x} = \frac{8}{x^2} \rightarrow y = \frac{8-x^2}{2x}$$

3. Obtener la **solución general** de la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2 = 0$, así como la **solución particular** tal que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

Solución.-

Escribiremos la ecuación: $y'' - 3y' = -2$.

Resolvamos en primer lugar la ecuación homogénea $y'' - 3y' = 0$.

Las soluciones de la ecuación característica $r^2 - 3r = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 3 \end{cases}$ proporcionan la

solución general de la ecuación homogénea: $y_1 = C_1 + C_2 e^{3x}$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayaremos soluciones del tipo $y_2 = ax$, de donde se obtiene que $a = \frac{2}{3}$ luego la solución general pedida:

$$y = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{2}{3}x$$

Si ahora sustituimos $x = 0$ en la solución obtenida y en su derivada, tendremos, de acuerdo con las condiciones iniciales dadas: $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 3C_2 + \frac{2}{3} = 1 \end{cases}$ de donde $-C_1 = C_2 = \frac{1}{9}$, con lo que la

solución particular pedida: $y = -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{2}{3}x$

4. Sea **C(x)** el **coste**, en euros, de producir x ordenadores portátiles. Sabiendo que la tasa a la que cambia el coste respecto al número de ordenadores

portátiles fabricados viene dada por la ecuación diferencial $\frac{dC(x)}{dx} = 30 - \frac{20}{x^2}$

y que el coste de producir 10 ordenadores portátiles es de 4.000 euros, hállese **C(x)**.

Solución.-

Integrando la ecuación diferencial se obtiene $C(x) = 30x + \frac{20}{x} + C$. De la condición

dada: $4000 = 300 + 2 + C \rightarrow C = 3698$. Luego $C(x) = 30x + \frac{20}{x} + 3698$.

5. Calcular el valor de la siguiente integral $A = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx$

Solución.-

$$A = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)dx = \beta\left(\frac{1}{2}, 2\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma(2)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$