

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Septiembre 2008. (Ex. Reserva)

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

Calcular el valor de la siguiente integral doble:

$$\iint_R (x + y + 1) dx dy$$

Siendo el recinto R de integración el siguiente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Nota:

Para su resolución, se sugiere efectuar un cambio a coordenadas polares.

Solución.-

Efectuamos el cambio $\left. \begin{array}{l} \frac{x}{a} = r \cos \alpha \\ \frac{y}{b} = r \sin \alpha \end{array} \right\}$ con lo que el recinto de integración se convierte en

el círculo $r \leq 1$. El jacobiano de la transformación: $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \alpha)} = \begin{vmatrix} a \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ b \sin \alpha & br \cos \alpha \end{vmatrix} = abr$. Luego la integral queda:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (ar \cos \alpha + br \sin \alpha + 1) abr dr d\alpha &= ab \int_0^{2\pi} \left[a \frac{r^3}{3} \cos \alpha + b \frac{r^3}{3} \sin \alpha + \frac{r^2}{2} \right]_0^1 d\alpha = \\ &= \frac{ab}{6} \int_0^{2\pi} (2a \cos \alpha + 2b \sin \alpha + 3) d\alpha = \frac{ab}{6} [2a \sin \alpha - 2b \cos \alpha + 3\alpha]_0^{2\pi} = \pi ab \end{aligned}$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Obtener la **solución general** del siguiente **sistema de ecuaciones diferenciales**:

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' &= -y_1 + 5y_2 - y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_2 + 3y_3 \end{aligned}$$

Solución.-

La matriz del sistema, $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, tiene como polinomio característico $x^3 - 11x^2 + 36x - 36 =$
 $= (x - 2)(x - 3)(x - 6)$. Los vectores propios serían:

$$\begin{aligned} \text{Para } x = 2: & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \text{Para } x = 3: & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \text{Para } x = 6: & \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Luego la solución general es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6x}$$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones Teórico-Prácticas

1. Demuestre si es **convergente o no** la siguiente **serie numérica**: $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

Solución.-

Por el criterio de D'Alembert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)^2}}{n e^{-n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n \cdot e^{2n+1}} = 0 < 1 \Rightarrow$ la

serie es convergente.

2. Si p es un número real mayor que uno, demostrar que $\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1)$.

Demostrar también que $\Gamma(1) = 1$, y deducir finalmente que si n es un número natural, entonces $\Gamma(n) = (n-1)!$

Solución.-

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \stackrel{\text{por partes}}{=} \left[-x^{p-1} e^{-x} \right]_0^{\infty} + (p-1) \int_0^{\infty} x^{p-2} e^{-x} dx = (p-1) \cdot \Gamma(p-1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -[e^{-x}]_0^{\infty} = 1$$

Demostraremos por inducción que, si n es un número natural, $\Gamma(n) = (n-1)!$:

Es cierta para $n = 1$.

Supongamos que es cierta para $n = p-1$, es decir que $\Gamma(p-1) = (p-2)!$; entonces

$$\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1) = (p-1) (p-2)! = (p-1)!$$

Luego es cierta $\forall n$.

3. Resolver la siguiente integral indefinida: $A = \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}$

Solución.-

Hacemos el cambio $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow A = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{2+2t} dt = \ln |1+t| + C =$

$$= \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

4. Obtenga y represente gráficamente las **trayectorias temporales** referidas a un modelo uniecuacional con trayectoria de crecimiento asintótico.

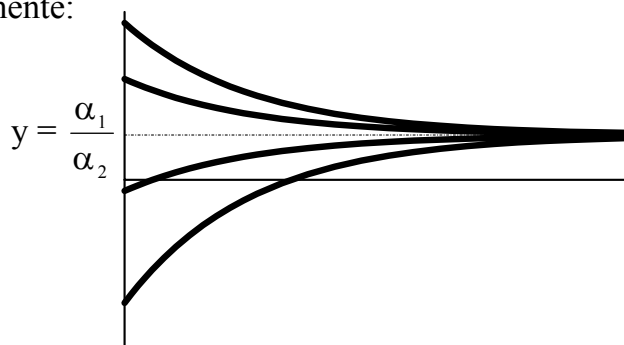
Solución.-

El crecimiento o variación de una función y que depende de la variable temporal t , se expresa mediante su derivada $y' = \frac{dy}{dt}$. Decimos que es asintótico si $\frac{dy}{dt} = \alpha_1 - \alpha_2 y$, con $\alpha_1 > 0$ y $\alpha_2 > 0$.

Se tiene que $\frac{dy}{\alpha_1 - \alpha_2 y} = dt$, e integrando: $-\frac{1}{\alpha_2} \ln |\alpha_1 - \alpha_2 y| = t + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln |\alpha_1 - \alpha_2 y| = -\alpha_2 t - \alpha_2 C \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 y = K e^{-\alpha_2 t}, \text{ siendo } K = e^{-\alpha_2 C} \Rightarrow y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{K}{\alpha_2} e^{-\alpha_2 t}.$$

Cada curva de esta familia (depende de la constante K), tiende asintóticamente, cuando $t \rightarrow \infty$, a la recta $y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. Gráficamente:



5. Señalemos por y , en euros, el **ingreso** que se obtiene al vender x unidades de un producto. Se sabe que la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas, viene

dada por la siguiente ecuación diferencial: $y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0$.

Obtener y , en función de x , sabiendo que la venta de 1 unidad produce un ingreso de 1 euro.

Solución.-

$$y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 1)dy = x^2 dx; \text{ integrando: } \frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} + C; \text{ puesto que } y(1) = 1 \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{3} + C \rightarrow C = -1, \text{ luego la solución es: } \frac{y^3}{3} - y = \frac{x^3}{3} - 1 \Leftrightarrow y^3 - 3y - x^3 + 3 = 0$$