

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.  
**MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

**PRUEBA PERSONAL. Enero 2009. Primera semana**

**PRIMERA PARTE: Problemas**

**PROBLEMA NÚMERO 1**

Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 2^x$$

**Solución.-**

La ecuación característica  $r^2 - 4r + 4 = 0$  admite la solución  $r = 2$ , doble, luego la solución general de la ecuación homogénea es  $y_x = C_1 2^x + C_2 x 2^x$

Para la ecuación completa ensayaremos una solución particular del tipo  $y_x = Ax^2 2^x$ . Sustituyendo en la ecuación:

$$A(x+2)^2 2^{x+2} - 4A(x+1)^2 2^{x+1} + 4Ax^2 2^x = 2^x$$

Dividiendo los dos miembros por  $2^x$ , desarrollando y simplificando, queda:

$$8A = 1 \leftrightarrow A = \frac{1}{8}$$

Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$$y_x = C_1 2^x + C_2 x 2^x + \frac{1}{8} x^2 2^x$$

**PROBLEMA NÚMERO 2**

Siendo  $I = \iint_R xy dx dy$ , donde  $R$  es el recinto limitado por:

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad x \geq 0$$

$$, \quad y \geq 0. \text{ Efectuando el cambio de variables: } u = x^2 + y^2,$$

$$v = x^2 - y^2.$$

Se pide:

- 1) Dibujar los recintos  $R$  en las variables  $(x, y)$ , y  $S$  en las variables  $(u, v)$
- 2) Resolver la integral  $I$ , haciendo uso de las nuevas variables  $(u, v)$

**Solución.-**

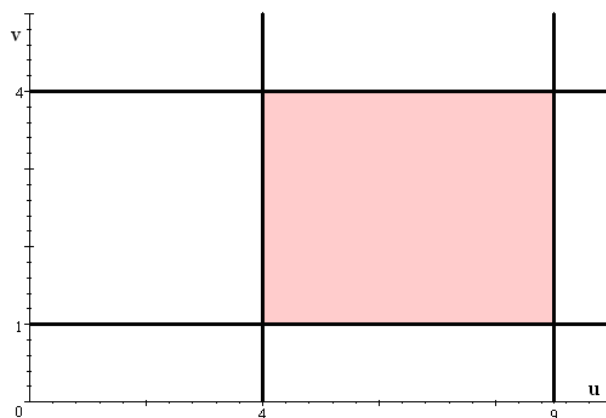
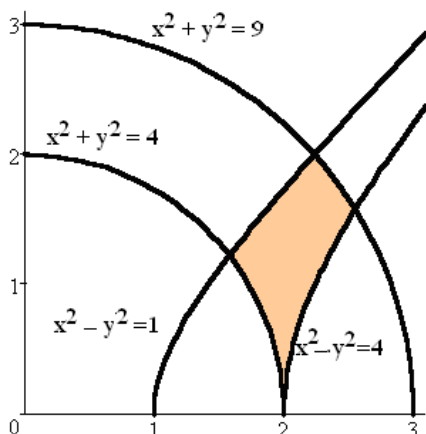
1) Las ecuaciones  $x^2 + y^2 = 4$  y  $x^2 + y^2 = 9$  son de las circunferencias de centro  $(0, 0)$  y radios 2 y 3 respectivamente.

Las ecuaciones  $x^2 - y^2 = 1$  y  $x^2 - y^2 = 4$  son de las hipérbolas equiláteras de centro  $(0, 0)$ , asíntotas  $y = \pm x$  y vértices respectivos  $(1, 0)$  y  $(2, 0)$  (para  $x > 0$ ).

Efectuado el cambio de variables, el recinto está limitado por las ecuaciones:

$$u = 4, \quad u = 9, \quad v = 1, \quad v = 4$$

Gráficamente:



2) De las ecuaciones del cambio

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = u \\ x^2 - y^2 = v \end{array} \right\} \quad \text{despejamos } x \text{ e } y: \quad \left. \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{u-v}{2}} \end{array} \right\}$$

de donde el valor absoluto del jacobiano de la transformación:

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \text{v.abs.} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{u+v}} & \frac{1}{2\sqrt{u+v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{u-v}} & \frac{-1}{2\sqrt{u-v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}}$$

Así pues, la integral sería:

$$I = \int_4^9 \int_1^4 \sqrt{\frac{u+v}{2}} \sqrt{\frac{u-v}{2}} \frac{1}{4\sqrt{u^2 - v^2}} dv du = \frac{1}{8} \int_4^9 \int_1^4 dv du = \frac{1}{8} (9-4)(4-1) = \frac{15}{8}$$

## SEGUNDA PARTE: cuestiones teórico-prácticas:

1. Estudiar el carácter de la serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{\ln n}$ ,

analizando previamente si cumple o no la condición necesaria de convergencia.

Nota: El exponente de la serie es: logaritmo neperiano de  $n$ , es decir:  $\ln n$

**Solución.-**

Cumple la condición necesaria de convergencia, es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \right)^{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{\ln n}} = 0$$

Aplicamos el criterio del logaritmo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( \frac{1}{a_n} \right)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{\ln n})}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n \cdot \ln 2}{\ln n} = \ln 2 < 1. \text{ Luego la serie es divergente.}$$

2. Resolver la siguiente integral:  $\int_0^{\infty} \sqrt[3]{x} \cdot e^{-\sqrt{x}} dx$

**Solución.-**

Hacemos el cambio  $\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2t dt$ . Sustituyendo en la integral queda:

$$2 \int_0^{\infty} t^{\frac{5}{3}} e^{-t} dt = 2 \Gamma\left(\frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{9} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$$

3. Sea  $y$  el coste de producir  $x$  unidades de un libro. La tasa a la que varía el coste respecto a los libros producidos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y + y^3}{x^3}$$

es:

Hállese el coste en función del número de libros producidos, sabiendo que si se producen 5 unidades, el coste es de 10 euros.

**Nota:** Tómese  $\ln(5) = 3/2$ . ( $\ln$  es el logaritmo neperiano)

**Solución.-**

Se trata de una ecuación diferencial homogénea. Hacemos el cambio  $y = ux \rightarrow y' = u'x + u$ . Sustituyendo en la ecuación:

$$u'x + u = u + u^3 \Leftrightarrow u'x = u^3 \Leftrightarrow \frac{1}{u^3} du = \frac{1}{x} dx$$

Integrando:

$$\frac{1}{-2u^2} = \ln x + C' \Leftrightarrow u = \frac{1}{\sqrt{-2 \ln x + C}} \Leftrightarrow y = \frac{x}{\sqrt{-2 \ln x + C}}$$

$$\text{Para las condiciones dadas: } 10 = \frac{5}{\sqrt{-2 \cdot \frac{3}{2} + C}} = \frac{5}{\sqrt{-3 + C}} \Leftrightarrow C = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

Así pues, el coste en función de los libros producidos:

$$y = \frac{x}{\sqrt{-2 \ln x + \frac{13}{4}}}$$

4. Hallar un factor integrante de la siguiente ecuación

diferencial:  $(y^2 + 2y - 3)dx + (4xy + 4x)dy = 0$

**Solución.-**

Como  $\frac{1}{Q} \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{4xy + 4x} (2y + 2 - 4y - 4) = \frac{-2(y+1)}{4x(y+1)} = \frac{-1}{2x}$  depende sólo de  $x$ ,

existe un factor integrante  $\mu$  que depende sólo de  $x$ , cumpliéndose que:  $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-1}{2x} \rightarrow$

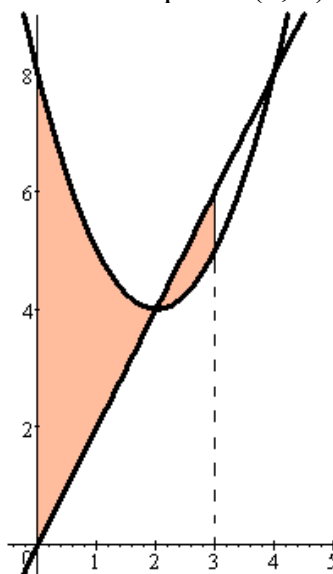
$$\rightarrow \ln \mu = \ln x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \mu = x^{-\frac{1}{2}}$$

5. Dibujando necesariamente el recinto en cuestión, calcúlese el área de la región limitada por las siguientes funciones:  $y = x^2 - 4x + 8$ , e  $y = 2x$ , para  $0 \leq x \leq 3$ .

**Solución.-**

$y = x^2 - 4x + 8$  es la parábola de eje  $x = 2$ , vértice el punto  $(2, 4)$  y que corta al eje OY en el punto  $(0, 8)$ .

La recta  $y = 2x$  corta a la parábola en el punto  $(2, 4)$



El área de la región limitada por las dos funciones será:

$$\int_0^2 (x^2 - 4x + 8 - 2x) dx + \int_2^3 (2x - x^2 + 4x - 8) dx = \int_0^2 (x^2 - 6x + 8) dx + \int_2^3 (-x^2 + 6x - 8) dx =$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_0^2 + \left[ -\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 8x \right]_2^3 = \frac{20}{3} + \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$