

**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Febrero 2009. Segunda semana

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1

Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 2^x + 1$$

Solución.-

La ecuación característica $r^2 - 4r + 4 = 0$ tiene la solución $r = 2$ doble. Luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_x = C_1 2^x + C_2 x 2^x$$

Como solución particular de la ecuación completa ensayaremos una del tipo $y_x = Ax^2 2^x + B$, de donde $y_{x+1} = A(x+1)^2 2^{x+1} + B$; $y_{x+2} = A(x+2)^2 2^{x+2} + B$. Sustituyendo en la ecuación:

$$A(x+2)^2 2^{x+2} + B - 4A(x+1)^2 2^{x+1} - 4B + 4Ax^2 2^x + 4B = 2^x + 1$$

simplificando, se obtiene:

$$8A2^x + B = 2^x + 1$$

de donde $A = \frac{1}{8}$ y $B = 1$. Así pues, la solución general de la ecuación completa es:

$$y_x = C_1 2^x + C_2 x 2^x + \frac{1}{8} x^2 2^x + 1$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

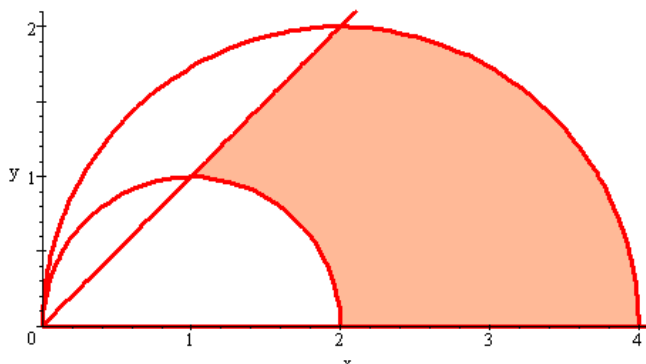
Dado el recinto R limitado por las curvas: $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$,

y las rectas $y = x$, $y = 0$, se efectúa un cambio a coordenadas polares (r, α) . Se pide:

- 1) Dibujar los recintos R y S en coordenadas cartesianas y polares, respectivamente.

Solución.-

$x^2 + y^2 = 2x$ es la circunferencia de centro $(1, 0)$ y radio 1; $x^2 + y^2 = 4x$ es la circunferencia de centro $(2, 0)$ y radio 2. El recinto R , gráficamente:



En coordenadas polares:

$$x^2 + y^2 = 2x \text{ queda: } r^2 = 2r \cos \alpha \leftrightarrow r = 2 \cos \alpha$$

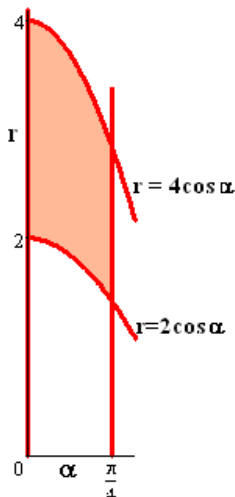
$$x^2 + y^2 = 4x \text{ queda: } r^2 = 4r \cos \alpha \leftrightarrow r = 4 \cos \alpha$$

$y = x$ (consideraremos solamente la semirrecta del primer cuadrante) queda

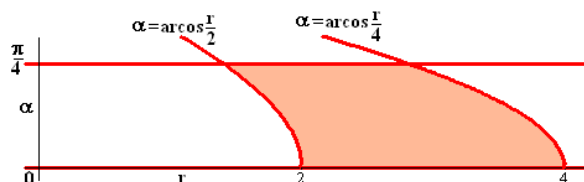
$$r \cos \alpha = r \sin \alpha \leftrightarrow \cos \alpha = \sin \alpha \leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$y = 0$ (consideraremos solamente la semirrecta $y \geq 0$) queda $\alpha = 0$.

Gráficamente:



o permutando los ejes



SEGUNDA PARTE: cuestiones teórico-prácticas:

1. Estudiar el carácter de la serie: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$

Solución.-

Obsérvese que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$, y en general

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}. \text{ Así pues}$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$ que es la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, convergente. Luego la serie dada es convergente.

2. Resolver la siguiente integral: $\int_0^1 2x^{-1/2} \cdot (2-2x)^{1/2} dx$

Solución.-

$$\int_0^1 2x^{-1/2} (2-2x)^{1/2} dx = 2^{3/2} \int_0^{1/2} x^{-1/2} (1-x)^{1/2} dx = 2^{3/2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2^{3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)} = 2^{3/2} \frac{\sqrt{\pi} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{1} = \pi\sqrt{2}$$

3. Obtener la solución general y la solución particular, de la siguiente ecuación

diferencial: $y' = e^{x-y}$, siendo $y(0) = 0$

Solución.-

Podemos escribir la ecuación: $e^y dy = e^x dx$. Integrando: $e^y = e^x + C \Leftrightarrow y = \ln(e^x + C)$, que es la solución general.

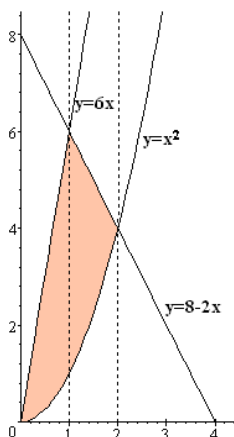
Para $x = 0 \rightarrow 0 = \ln(1+C) \Leftrightarrow 1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 0$, luego $y = \ln e^x \Leftrightarrow y = x$, es la solución particular.

4. Calcule el área del recinto limitado por:

$$y \leq 6x, \quad y \geq x^2, \quad y \leq 8-2x, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

Solución.-

La representación gráfica:



El área sería: $\int_0^1 (6x - x^2) dx + \int_1^2 (8 - 2x - x^2) dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[8x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{16}{3}$

5. La tasa a la que cambia el precio de venta, y , de la gasolina, respecto a su demanda, x , viene dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 1}.$$

Hállese el precio de la gasolina, como una

función de la demanda, en el caso de que el precio fuese de 4,5 euros cuando la demanda es de 5 litros.

Solución.-

La ecuación se puede escribir:

$$(3x^2 + 2xy)dx + (x^2 + 1)dy = 0$$

que, podemos comprobar, se trata de una ecuación diferencial exacta. Tendremos:

$$f(x,y) = \int (3x^2 + 2xy)dx = x^3 + x^2y + C(y) \rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + C'(y) = x^2 + 1 \rightarrow C'(y) = 1 \rightarrow$$

$\rightarrow C(y) = y + C$. Luego la solución general es:

$$x^3 + x^2y + y + C = 0$$

Sustituyendo $y = 4,5$, $x = 5 \rightarrow C = -242$. Despejando y :

$$y = \frac{242 - x^3}{x^2 + 1}$$