



**FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES DE LA UNED.
MATEMÁTICAS III. Segundo Curso de ADE.**

PRUEBA PERSONAL. Septiembre 2006 (EX. OR)

PRIMERA PARTE: Problemas

PROBLEMA NÚMERO 1.

Resolver la siguiente ecuación lineal en diferencias:

$$y_{x+3} + 3y_{x+2} + 3y_{x+1} + y_x = 6^x$$

Solución.-

El polinomio característico $t^3 + 3t^2 + 3t + 1$ tiene la raíz $t = -1$, triple, luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_1(x) = C_1(-1)^x + C_2x(-1)^x + C_3x^2(-1)^x$.

Para buscar una solución particular de la ecuación completa, ensayaremos una solución de la forma $y_2(x) = k \cdot 6^x$. Se cumplirá pues:

$$216k6^x + 108k6^x + 18k6^x + k6^x = 6^x \Leftrightarrow k = \frac{1}{343}$$

La solución general de la ecuación en diferencias es:

$$y_x = y_1(x) + y_2(x) = C_1(-1)^x + C_2x(-1)^x + C_3x^2(-1)^x + \frac{6^x}{343}$$

PROBLEMA NÚMERO 2.

Calcular el área del dominio acotado A que limitan las curvas :

$$y = x^2, \quad y = 2x^2, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x$$

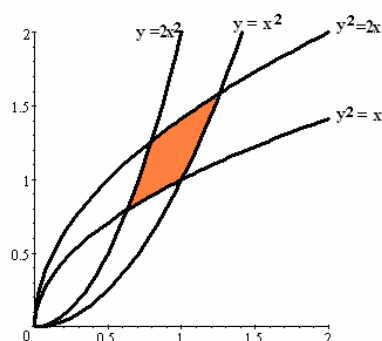
mediante el siguiente cambio de variables:

$$x^2 = uy, \quad y^2 = vx$$

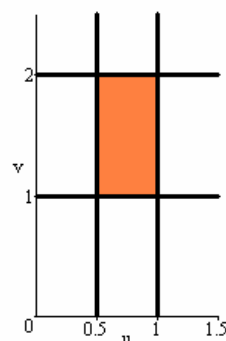
Nota: Dibujar necesariamente los recintos A y A' correspondientes a las variables (x, y) e (u, v)

Solución.-

Efectuado el cambio de variables, las curvas se convierten respectivamente en: $u = 1$, $u = \frac{1}{2}$, $v = 1$, $v = 2$, con lo que los recintos A y A' son:



Recinto A



Recinto A'



El área pedida puede calcularse mediante la integral doble de la función $f(x, y) = 1$ en el recinto A. Efectuando el cambio de variable, será:

$$\text{Área} = \iint_A 1 \cdot dx dy = \iint_{A'} 1 \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_1^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dv$$

Para calcular el jacobiano, despejamos x e y del cambio de variables, quedando

$$\left. \begin{aligned} x &= u^{\frac{2}{3}} v^{\frac{1}{3}} \\ y &= u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}} \end{aligned} \right\}, \text{ de donde } \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{2}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}. \text{ Luego el área es } \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_1^2 dv = \frac{1}{6}$$

SEGUNDA PARTE: Cuestiones teórico prácticas

1. Estudiar el carácter de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4n}$

Solución.-

$$\text{Por el criterio de D'Alembert: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)(2n+1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4n \cdot 4(n+1)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4 \cdot 8 \cdot 12 \cdots 4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

\Rightarrow la serie es convergente.

2. Calcular el valor de la siguiente integral: $A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

Solución.-

$$\begin{aligned} \text{Se convierte en una integral euleriana mediante el cambio } x^3 = t \rightarrow x = t^{\frac{1}{3}} \rightarrow \\ dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} dt \rightarrow A = \frac{1}{3} \int_0^1 t^{-\frac{2}{3}} (1-t)^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{3} \beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = (\text{usando la fórmula de los complementos}) \\ = \frac{1}{3} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

3. Calcular el valor de la siguiente integral: $B = \int_{\pi}^{\pi} \frac{dx}{\cos x}$

Solución.-

Trivialmente $B = 0$.

4 Sea y el coste de producir x unidades de un cierto producto. Se sabe que la tasa a la que cambia el coste de producción, respecto al número de unidades fabricadas, es igual al doble del cuadrado del coste menos el cuadrado del número de unidades producidas, dividido todo ello por el producto de ambas variables. Se pide hallar la relación que existe entre las unidades producidas y el coste de producción. Para ello, se sabe que al producir 1 unidad de producto, el coste de producción es de 3 unidades monetarias.

Solución.-

Planteado el problema conduce a la ecuación diferencial homogénea:



$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - x^2}{xy} \text{ con la condición } y(1) = 3$$

Efectuando el cambio de variable $y = ux$ y sustituyendo, queda:

$$\frac{xdu + udx}{dx} = \frac{2u^2x^2 - x^2}{ux^2} = \frac{2u^2 - 1}{u} \rightarrow \frac{u}{u^2 - 1} du = \frac{1}{x} dx \rightarrow (\text{integrando}) \rightarrow \frac{1}{2} \ln|u^2 - 1| = \ln C_1 x$$

$\rightarrow u^2 - 1 = Cx^2 \rightarrow (\text{deshaciendo el cambio}) \rightarrow y^2 = x^2 + Cx^4 \rightarrow y = \sqrt{x^2 + Cx^4}$. Sustituyendo $x = 1$, se obtiene: $3 = \sqrt{1 + C} \rightarrow C = 8$. La relación pedida es:

$$y = \sqrt{x^2 + 8x^4}$$

5. Una máquina cosechadora de trigo cuando tiene x meses de vida, genera ingresos a una tasa de : $R(x) = 8000 - 30x^2$ euros mensuales. Asimismo, unos costes a una tasa también mensual, de $T(x) = 2000 + 30x^2$ euros. Se pregunta: ¿Durante cuantos meses será rentable el uso de la máquina?. ¿Cuáles serán las ganancias totales generadas en esos meses?

Solución.-

Dejará de ser rentable cuando $8000 - 30x^2 < 2000 + 30x^2 \Leftrightarrow 60x^2 > 6000 \Leftrightarrow x > 10$ meses.

Las ganancias totales serían:

$$\int_0^{10} (8000 - 30x^2 - 2000 - 30x^2) dx = \int_0^{10} (6000 - 60x^2) dx = [6000x - 20x^3]_0^{10} = 40000 \text{ €}.$$