



**ESTADÍSTICA TEÓRICA I. SEPTIEMBRE 2003 Código  
Asignatura. 207. Código carrera 43. Tipo examen B.**

**PREGUNTAS TIPO TEST:**

1ª.- Dados los sucesos A y B con  $P(A) = P(B) = 1/4$ , donde A y B son independientes. ¿Cuál es  $P(\bar{A} \cap B)$ ?

- a) 1/16      b) 3/4      c) 3/16      d) Ninguna de las anteriores

**Respuesta.- c) 3/16**

Explicación:  $P(\bar{A} \cap B) = P(B)P(\bar{A}/B) = P(B)(1 - P(A/B)) = P(B)(1 - P(A)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

2ª.- Si  $\eta$  es  $N(2; 0,1)$  y  $P(a \leq \eta \leq 2,2) = 0,6508$  ¿Cuál es el valor de a ?

- a) 1,955      b) 2,045      c) -1,955      d) Ninguna es correcta

**Respuesta.- a) 1,955**

Explicación: Siendo Z normal  $N(0,1)$  se tendrá.  $0,6508 = P(a \leq \eta \leq 2,2) = P\left(\frac{a-2}{0,1} < Z < \frac{2,2-2}{0,1}\right) = P\left(\frac{a-2}{0,1} < Z < 2\right) = P(Z < 2) - P\left(Z \leq \frac{a-2}{0,1}\right) = 0,9772 - P\left(Z \leq \frac{a-2}{0,1}\right)$ , de donde  $P\left(Z \leq \frac{a-2}{0,1}\right) = 0,9772 - 0,6508 = 0,3264$ . De las tablas se obtiene que  $\frac{a-2}{0,1} = -0,4499$ , de donde  $a = 1,955$

3ª.- Sean x, y v.a. tales que se cumple  $E\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{E(x)}{E(y)}$ , entonces el valor de  $\text{Cov}\left(\frac{x}{y}, y\right)$  es:

- a) 0      b) E(x)      c) E(x)E(y)      d) Ninguna es cierta.

**Respuesta.- a) 0**

Explicación:  $\text{Cov}\left(\frac{x}{y}, y\right) = E\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) - E\left(\frac{x}{y}\right) \cdot E(y) = E(x) - \frac{E(x)}{E(y)} \cdot E(y) = 0$

4ª.- Dada la v. a.  $\xi$  que tiene media y varianza finitas. La probabilidad de que esa v.a. difiera de su media un valor menor que 3,5 veces su desviación típica es:

- a)  $\geq 0,08163$       b)  $\geq 0,91837$       c)  $\leq 0,08163$       d) Ninguna es cierta.

**Respuesta.- b)  $\geq 0,91837$**

Explicación: De la desigualdad de Tchebychev,  $P[|\xi - E(\xi)| < k] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$ , haciendo  $k = 3,5\sigma$  se tiene.  $P[|\xi - E(\xi)| < 3,5\sigma] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{(3,5\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{(3,5)^2} \cong 0,91837$

5ª.- Dadas  $\xi_i$ , n v.a. independientes que siguen la misma distribución de Poisson  $P(\lambda)$ . La función característica de la v.a.  $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$  es:

- a)  $e^{n\lambda(e^{it}-1)}$       b)  $e^{\lambda(e^{it}-1)}$       c)  $e^{n\lambda(e^{it}-1)}$       d) Ninguna.

**Respuesta.- c)  $e^{n\lambda(e^{it}-1)}$**

Explicación: La función característica de  $\xi_i$  es  $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ , luego:



$$\varphi_{\eta}(t) = E\left(e^{i\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)t}\right) = \prod_{j=1}^n \left(e^{i\xi_j t}\right) = \prod_{j=1}^n \left(e^{i\lambda(e^{it}-1)}\right) = e^{n\lambda(e^{it}-1)}$$

- 6ª.- Dada una v.a.  $\xi$  con  $f(x) = kx^3$  para  $0 \leq x \leq 2$  ¿Cuál es  $P(|\xi| \geq 1/2)$ ?  
**a)**  $\cong 0,96875$     **b)**  $\cong 0,99609$     **c)**  $\cong 0,16987$     **d)** Ninguna es cierta.

**Respuesta.- b)**  $\cong 0,99609$

Explicación: Calculamos en primer lugar el valor de  $k$ :  $1 = \int_0^2 kx^3 dx = \frac{k}{4} [x^4]_0^2 = 4k \rightarrow$

$$k = \frac{1}{4}. \text{ Así pues, } P(|\xi| \geq 1/2) = \frac{1}{4} \int_{1/2}^2 x^3 dx = \frac{1}{16} [x^4]_{1/2}^2 = \frac{1}{16} \left(16 - \frac{1}{16}\right) \cong 0,99609.$$

- 7ª.- Una moneda regular se lanza al aire 20 veces. La probabilidad de obtener 10 caras y 10 cruces es:

- a)** 0,5    **b)**  $(1/2)^{10}$     **c)**  $(1/2)^{20}$     **d)** Ninguna es cierta.

**Respuesta.- d)** Ninguna es cierta.

Explicación: La probabilidad de obtener 10 caras y 10 cruces es  $\binom{20}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ .

- 8ª.- Si dos variables aleatorias  $\xi$  y  $\eta$  son estadísticamente independientes:

- a)**  $\rho \neq 0$     **b)**  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$     **c)**  $\rho = 1$     **d)** Ninguna es cierta.

**Respuesta.- b)**  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$

Explicación:  $\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi \cdot \eta) - E(\xi) \cdot E(\eta) = E(\xi) \cdot E(\eta) - E(\xi) \cdot E(\eta) = 0$ .

- 9ª.- La función característica de una variable aleatoria verifica que:

- a)**  $\varphi(0) = 0$     **b)**  $\varphi(1) = 0$     **c)**  $\varphi(0) = 1$     **d)** Ninguna es correcta.

**Respuesta.- c)**  $\varphi(0) = 1$

Explicación:  $\varphi(t) = E(e^{it\xi})$  luego  $\varphi(0) = E(1) = 1$ .

- 10ª.- Las variables  $\eta_i$  son  $N(5, 5)$  e independientes. Si  $Z = \sum_{i=1}^n \eta_i$ , la distribución de la v.

a.  $W = \frac{Z}{5n^2}$  es:

- a)**  $N\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}\right)$     **b)**  $N(5n, 5\sqrt{n})$     **c)**  $N\left(1, \frac{1}{n}\right)$     **d)** Ninguna es correcta.

**Respuesta.- d)** Ninguna es correcta.

Explicación: Desde luego,  $W$  es normal, por ser combinación lineal de v.a. normales. Calculemos su media y su desviación típica.

$$E(W) = \frac{1}{5n^2} E(Z) = \frac{5n}{5n^2} = \frac{1}{n}; \text{ Var}(W) = \frac{1}{25n^4} \text{Var}(Z) = \frac{25n}{25n^4} = \frac{1}{n^3} \rightarrow \text{DT}(W) = \frac{1}{n\sqrt{n}}. \text{ Es}$$

decir,  $W$  es normal  $N\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$

### EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1º.- Una empresa que fabrica productos artesanales, observa que sus ventas han disminuido. Realiza un estudio sobre la demanda de éstos productos y obtiene que la demanda diaria se distribuye normalmente, con media 5.000 unidades y desviación típica 500 unidades.



Para no crear una página web, la empresa necesita que la demanda de dos semanas sea superior a 68.000 unidades. ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa cree la página web para dar a conocer la empresa en todo el mundo?

**Solución.-**

Representemos por  $\xi_i$  la variable aleatoria “unidades demandadas el día i” que supondremos independientes, al variar i. Supondremos también que en dos semanas hay 10 días hábiles (en los que hay demanda). Entonces, la variable  $\eta = \sum_{i=1}^{10} \xi_i$  se distribuye normal  $N(50000, \sqrt{10 \cdot 500^2}) = N(50000, 500\sqrt{10})$ . La probabilidad pedida será:

$$P(\eta \leq 68000) = P\left(\frac{\eta - 50000}{500\sqrt{10}} \leq \frac{68000 - 50000}{500\sqrt{10}}\right) \cong P(Z \leq 11,38) \cong 1.$$

**2º.-** Una cooperativa agrícola, realiza un estudio que evalúe la producción en la próxima cosecha. La conclusión es presentada a través de la siguiente función:  $f(x) = kx(10 - x)$  (x expresada en miles de unidades). Admitiéndose como producción mínima 1.000 unidades y como máxima 10.000 unidades. Calcular:

- a) Valor de k para que sea función de densidad y el valor de la función de distribución,
- b) Producción esperada
- c) La probabilidad de que la producción esté entre 2.000 y 6.000 unidades.

**Solución.-**

a) Debe cumplirse que  $1 = \int_1^{10} kx(10 - x)dx = k \left[ \frac{10x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^{10} = k \cdot 162 \rightarrow k = \frac{1}{162}$

- b) Siendo  $\xi$  la variable aleatoria “producción en la próxima cosecha, en miles de unidades”, se tendrá:

$$E(\xi) = \frac{1}{162} \int_1^{10} x^2(10 - x)dx = \frac{1}{162} \left[ \frac{10x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_1^{10} = \frac{41}{8} = 5,125$$

Por tanto la producción esperada será de 5125 unidades.

c)  $P(2 < \xi < 6) = \frac{1}{162} \int_2^6 x(10 - x)dx = \frac{1}{162} \left[ \frac{10x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_2^6 = \frac{136}{243} \cong 0,5597$