



**ESTADÍSTICA TEÓRICA I. SEPTIEMBRE 2003**  
**Código asignatura. 207. Código carrera 43. Examen tipo reserva.**

**PREGUNTAS TIPO TEST:**

1ª.- Dados los sucesos A y B con  $P(A) = P(B) = 1/3$ , donde A y B son independientes. ¿Cuál es  $P(A/\bar{B})$ ?

- a)  $2/3$       b)  $2/9$       c)  $1/3$       d) Ninguna de las anteriores.

**Respuesta:** c)  $1/3$

Explicación: 
$$P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)P(\bar{B}/A)}{P(\bar{B})} = \frac{P(A)(1 - P(B/A))}{1 - P(B)} = \frac{P(A)(1 - P(B))}{1 - P(B)} = P(A) = \frac{1}{3}$$

2ª.- Las v.a.  $(\xi, \eta)$  tienen como f. de cuantía conjunta:  $P(1, 1) = P(2, 1) = 2/5$  y  $P(1, 2) = 1/5$ . La f. de cuantía marginal de  $\xi$  es:

- a)  $P(\xi = 1) = 3/5$  y  $P(\xi = 2) = 2/5$       b)  $P(\xi = 1) = 4/5$  y  $P(\xi = 2) = 1/5$   
c)  $P(\xi = 1) = 2/5$  y  $P(\xi = 2) = 1/5$       d) Ninguna es correcta.

**Respuesta:** a)  $P(\xi = 1) = 3/5$  y  $P(\xi = 2) = 2/5$

Explicación: Para que todas las probabilidades sumen 1 debe ser  $P(2, 2) = 0$ . En ese caso la distribución de las probabilidades sería:

$\xi \backslash \eta$	1	2	
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$

3ª.- Sean las v. a.  $\xi_1$  y  $\xi_2$  independientes,  $\xi_1 \rightarrow B(n_1, p)$  y  $\xi_2 \rightarrow B(n_2, p)$ . La v.a.  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  tiene como distribución:

- a)  $B(1, p)$       b)  $B(n_1 \times n_2, p)$       c)  $B(n_1 + n_2, p)$       d) Ninguna es cierta.

**Respuesta:** c)  $B(n_1 + n_2, p)$

Explicación: La función característica de una v.a. binomial  $B(n, p)$  es  $\varphi(t) = (q + pe^{it})^n$ . La función característica de  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  será:  $E(e^{i\eta t}) = E(e^{i\xi_1 t + i\xi_2 t}) = E(e^{i\xi_1 t} e^{i\xi_2 t}) = E(e^{i\xi_1 t}) E(e^{i\xi_2 t}) = (q + pe^{it})^{n_1} (q + pe^{it})^{n_2} = (q + pe^{it})^{n_1 + n_2}$  que corresponde a una binomial  $B(n_1 + n_2, p)$ .

4ª.- Sean  $\lambda, \eta$ , v.a. de igual media  $m$  y varianza  $\delta^2$ . Sean las v.a  $U = \lambda - \eta$  y  $V = \lambda + \eta$ . El coef. de correlación  $\rho_{UV}$  es:

- a)  $\rho_{UV} = 0$       b)  $\rho_{UV} \neq 0$       c)  $\rho_{UV} = 1$       d) Ninguna es cierta.

**Respuesta:** a)  $\rho_{UV} = 0$

Explicación:  $\rho_{UV} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\text{Var}(U)\text{Var}(V)}}$ . Se tiene que  $\text{Cov}(U, V) = E(U \cdot V) - E(U) \cdot E(V) = E(\lambda^2 - \eta^2) - [E(\lambda) - E(\eta)] \cdot [E(\lambda) + E(\eta)] = E(\lambda^2 - \eta^2) - [E(\lambda)^2 - E(\eta)^2] = \text{Var}(\lambda) - \text{Var}(\eta) = 0$

5ª.- La convergencia de una distribución binomial a una normal se consigue probar a partir del teorema de:

- a) Chebychef      b) Gauss      c) Pearson      d) Ninguna es cierta

**Respuesta:** d) Ninguna es cierta



Explicación: El teorema que prueba la convergencia de una distribución binomial a una normal es el de Moivre.

6ª.- Sea X una v. a. con función de densidad  $f(x) = \frac{2x}{15}$  si  $1 \leq x \leq 4$ . La media de la v. a.

$Z = x - 4$  es:

- a) 3,6      b) 0,13      c) -1,2      d) Ninguna es cierra.

**Respuesta: c) -1,2**

Explicación:  $E(X) = \int_1^4 \frac{2x^2}{15} dx = \frac{2}{45} [x^3]_1^4 = 2,8 \rightarrow E(Z) = E(X) - 4 = 2,8 - 4 = -1,2$

7ª.- El coeficiente  $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma_4} - 3$  mide:

- a) Asimetría      b) Curtosis      c) Correlación      d) Ninguna es correcta.

**Respuesta: b) Curtosis**

8ª.- Sea X una v. a. con función característica  $\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-ke^{it}}$ . El valor de K para que sea

función característica es:

- a)  $(1-p)$       b) p      c) 1      d) Ninguna es correcta,

**Respuesta: a)  $(1-p)$**

Explicación:  $\varphi(t) = E(e^{itX})$ , de donde se deduce que  $\varphi(0) = E(e^0) = E(1) = 1$ . Sustituyendo en la función característica dada, será:  $\varphi(0) = \frac{p}{1-k} = 1 \rightarrow 1-k = p \rightarrow k = 1-p$ .

9ª.- Sean X e Y dos v.a independientes normales  $N(3, 3)$ . Se define la v. a.  $Z = \frac{X-Y}{\sqrt{18}}$ . La

$P(-1,64 \leq Z \leq 1,64)$  es:

- a) 0,101      b) 0,0505      c) 0,899      d) Ninguna es correcta.

**Respuesta: c) 0,899**

Explicación:  $E(Z) = \frac{1}{\sqrt{18}}(E(X) - E(Y)) = 0$ ;  $\text{Var}(Z) = \frac{1}{18}(\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)) = \frac{9+9}{18} = 1$ .

Luego Z es normal  $N(0, 1)$ . De las tablas se obtiene que  $P(-1,64 \leq Z \leq 1,64) = 0,899$ .

10ª.- Sea X una v. a. con función  $f(x) = 3e^{-3x}$   $x \geq 0$ . Si  $P(x \leq a) = 0,5$ , se verifica que a toma como valor:

- a)  $\frac{1,5}{3}$       b)  $\frac{-\ln(0,5)}{3}$       c)  $\frac{\ln(1,5)}{3}$       d) Ninguna es correcta.

**Respuesta: b)  $\frac{-\ln(0,5)}{3}$**

Explicación:  $0,5 = \int_0^a 3e^{-3x} dx = -[e^{-3x}]_0^a = 1 - e^{-3a} \rightarrow e^{-3a} = 0,5 \rightarrow -3a = \ln(0,5) \rightarrow$

$a = \frac{-\ln(0,5)}{3}$



## EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1º.- Dada una variable aleatoria bidimensional (x, y) con función de **densidad**<sup>1</sup>:  $f(x, y) = K(x + y)$ ,  $0 \leq x \leq y \leq 1$ , se pide: **a)** Comprobar que es función de densidad y calcular las distribuciones marginales. **b)** Calcular la función de regresión  $y/x$ .

**Solución.-**

$$\text{a)} \text{ Debe ser } 1 = k \int_0^1 \left( \int_0^y (x + y) dx \right) dy = k \int_0^1 \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_0^y dy = k \int_0^1 \frac{3y^2}{2} dy = \frac{k}{2}. \text{ Luego para}$$

que  $f$  sea función de densidad debe ser  $k = 2$ .

Las funciones de densidad marginales serán:

$$f_1(x) = \int_x^1 2(x + y) dy = 2 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_x^1 = -3x^2 + 2x + 1, \text{ para } 0 \leq x \leq 1.$$

$$f_2(y) = \int_0^y 2(x + y) dx = 2 \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_0^y = 3y^2, \text{ para } 0 \leq y \leq 1$$

y las correspondientes funciones de distribución marginales.

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ \int_0^x (-3t^2 + 2t + 1) dt, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{para } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{para } x < 0 \\ -x^3 + x^2 + x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

$$F_2(y) = \begin{cases} 0, & \text{para } y < 0 \\ \int_0^y 3t^2 dt, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & \text{para } y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{para } y < 0 \\ y^3, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & \text{para } y > 1 \end{cases}$$

**b)** La función de densidad condicionada  $f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{2(x + y)}{-3x^2 + 2x + 1}$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . De

$$\text{donde la función de regresión de } y/x: E(y/x) = \int_0^1 y f(y/x) dy = \frac{2}{-3x^2 + 2x + 1} \int_0^1 y(x + y) dy =$$

$$= \frac{2}{-3x^2 + 2x + 1} \left[ \frac{y^2 x}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{x + 2/3}{-3x^2 + 2x + 1}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

2º.- Un almacén desea proveerse de un determinado artículo para la campaña de verano que comprende 90 días. Si el promedio de artículos diarios que vende en dicho período del año es de 15 con una desviación típica de 5. Hallar el número máximo de artículos a comprar si pretende una garantía del 95% de que transcurrida la campaña no le queden artículos en el almacén.

**Solución.-**

Sea  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, 90$  la v.a. “número de artículos vendidos el día  $i$ ”. Entonces la v.a.  $\eta = \sum_{i=1}^{90} \xi_i$  sigue aproximadamente una distribución normal de media  $E(\eta) = \sum_{i=1}^{90} E(\xi_i) = 90 \cdot 15 =$

<sup>1</sup> En el enunciado original del examen dice, seguramente por error, “función de distribución”.



= 1350 y de desviación típica  $\sqrt{\text{Var}(\eta)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{90} \text{Var}(\xi_i)} = 5\sqrt{90}$ . Así pues, si  $n$  es el número de artículos buscado, será (por ser  $n$  una variable discreta, procedería hacer una corrección por continuidad):

$$0,95 \leq P(\eta \geq n) = P(\eta \geq n - 0,5) = P\left(Z \geq \frac{n - 1350,5}{5\sqrt{90}}\right).$$

De las tablas se deduce que  $\frac{n - 1350,5}{5\sqrt{90}} \leq -1,6449 \rightarrow n \leq 1272,48$ .

Así pues, el número máximo pedido sería de 1272 artículos.