



**ESTADÍSTICA TEÓRICA I. JUNIO 2004. Segunda semana**  
**Código asignatura. 207. Código carrera 43. Examen tipo A.**

**PREGUNTAS TIPO TEST:**

1ª.- Dados los sucesos A y B con  $P(A) = 0,4$ ;  $P(B) = 0,5$  y  $P(A \cap B) = 0,2$ . Podemos afirmar:

- a) A y B son disjuntos      b) A y  $\bar{B}$  no son independientes      c) A y  $\bar{B}$  son independientes  
d) Ninguna de las anteriores.

**Respuesta.- c)** A y  $\bar{B}$  son independientes

Explicación:  $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0,4 - 0,2}{0,5} = 0,4 = P(A)$

2ª.- La función característica de una v.a.  $\xi$  es:  $\varphi(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{it}\right)^2$ . ¿Cuál es la función característica de la v.a.  $\eta = \xi + 2$ ?

- a)  $e^{2it} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{it}\right)^2$       b)  $e^{2it}$       c)  $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{it}\right)^2 + 2$       d) Ninguna de las anteriores.

**Respuesta.- a)**  $e^{2it} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{it}\right)^2$

Explicación: la función característica de  $\eta = E(e^{it\eta}) = E(e^{it(\xi+2)}) = E(e^{2it+2i\xi}) = e^{2it}E(e^{2i\xi})$

3ª.- El momento de segundo orden respecto a la media ( $\mu_2$ ) se conoce con el nombre de:

- a) Esperanza      b) Coeficiente de determinación      c) Varianza      d) Ninguna es cierta.

**Respuesta.- c)** Varianza

4ª.- Dada una v.a. con  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{3}(x^2 - 1), & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$  ¿Cuál es su media?

- a) 7/3      b) 1      c) 14/9      d) Ninguna de las anteriores.

**Respuesta.- c)** 14/9

Explicación: La función de densidad  $f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$ , luego media =

$$= \int_1^2 \frac{2}{3}x^2 dx = \frac{2}{9} [x^3]_1^2 = \frac{14}{9}$$

5ª.- Dadas las v.a. independientes  $\xi_1 \equiv G(0,6)$  y  $\xi_2 \equiv G(0,6)$ , la distribución de la v.a.  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  es:

- a) BN(2; 0,6)      b) G(0,6)      c) G(1,2)      d) Ninguna es cierta.

**Respuesta.- a)** BN(2; 0,6)

Explicación:  $\varphi_\eta(t) = E(e^{it\eta}) = E(e^{it\xi_1 + it\xi_2}) = E(e^{it\xi_1})E(e^{it\xi_2}) = \frac{(0,6)^2}{(1 - 0,4e^{it})^2}$  que es la función

característica de la BN(2; 0,6).



**6ª.-** Dadas  $\xi_1, \dots, \xi_n$  v.a independientes distribuidas  $N(0,1)$ . La distribución de la v.a  $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n$  es:

- a)  $N(0, n)$     b)  $\chi^2(n)$     c)  $N(0, \sqrt{n})$     d) Ninguna de las anteriores.

**Respuesta.-** c)  $N(0, \sqrt{n})$

Explicación:  $\varphi_\eta(t) = E(e^{it\eta}) = E(e^{it\xi_1 + \dots + it\xi_n}) = E(e^{it\xi_1}) \dots E(e^{it\xi_n}) = e^{-\frac{1}{2}t^2} \dots e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}nt^2} = e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{n}t)^2}$  que es la función característica de una v.a.  $N(0, \sqrt{n})$

**7ª.-**Cuál de los siguientes modelos de distribuciones de probabilidad discretos no verifica la propiedad aditiva o reproductiva:

- a) Geométrica    b) Binomial Negativa    c) Binomial    d) Ninguna de las anteriores.

**Respuesta.-** a) Geométrica

Explicación: ver pregunta 5ª.

**8ª.-** Dada una v.a bidimensional continua  $(\xi, \eta)$ , se dice que  $\xi$  y  $\eta$  son independientes si:

- a)  $f(y/x) = f_1(x)$     b)  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$     c)  $f(x/y) = f_2(y)$     d) Ninguna es correcta

**Respuesta.-** b)  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$

**9ª.-** Sean las v.a. independientes  $\xi_1 \equiv N(1, 2)$  y  $\xi_2 \equiv N(2, 2)$ . Se define la v.a.  $\eta = 2\xi_1 + \xi_2$  ¿cuál es la  $P(\eta \geq 1,76)$ ?:

- a) 0,6915    b) 0,3085    c) -0,3085    d) Ninguna de las anteriores.

**Respuesta.-** a) 0,6915

Explicación:  $\eta$  es normal  $N(4, \sqrt{20})$  luego  $P(\eta \geq 1,76) = P\left(Z \geq \frac{1,76-4}{\sqrt{20}}\right) \cong P(Z \geq -0,5) \cong \cong 0,6915$ .

**10ª.-** Dada una v.a.  $\xi$  con  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)$  para  $|x| \leq 1$  La  $P(0 \leq \xi \leq 2)$  será:

- a) 1/2    b) 0    c) 3/4    d) Ninguna es correcta.

**Respuesta.-** c) 3/4

Explicación:  $P(0 \leq \xi \leq 2) = \int_0^2 \frac{1}{2}(x+1)dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(x+1)dx = \frac{1}{4}[(x+1)^2]_0^1 = \frac{3}{4}$

## EJERCICIOS PRÁCTICOS:

**Iª.-** La cantidad de pan, en cientos de Kilogramos, que diariamente se vende en una gran superficie puede representarse mediante una variable aleatoria cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{77}(1+x), & \text{para } 1 < x < M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es la cantidad de pan diaria máxima que podría vender la gran superficie?  
b) Obtenga la cantidad media de pan vendida en la gran superficie y su desviación típica.

**Solución.-**

a) Debe ser  $1 = \int_1^M \frac{2}{77}(1+x)dx = \frac{1}{77}[(1+x)^2]_1^M = \frac{M^2 + 2M - 3}{77}$ , de donde se obtiene  $M =$

$= 8$ . Así pues la cantidad de pan diaria máxima que podría vender la gran superficie es de 800 kg.



b)  $\alpha_1 = \int_1^8 \frac{2}{77}(x + x^2)dx = \frac{173}{33} = 5,24$ . Así pues la cantidad media de pan vendida sería  $\cong$  524 kg.

$$\alpha_2 = \int_1^8 \frac{2}{77}(x^2 + x^3)dx = \frac{2047}{66}, \text{ luego la varianza } \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \frac{2047}{66} - \left(\frac{173}{33}\right)^2 = \frac{7693}{2178}.$$

La desviación típica:  $\sqrt{\frac{7693}{2178}} \cong 1,8794$

2º.- Una aseguradora ha detectado que la cantidad de tiempo, en horas, que invierten sus agentes de seguros cada día en vender una póliza, sigue una distribución normal  $N(2,1)$ .

a) Calcule la probabilidad de que un agente invierta más de cuatro horas en vender una póliza.

b) Para una muestra de 400 agentes, calcular la probabilidad de que más de tres de ellos inviertan más de cuatro horas en vender una póliza.

**Solución.-**

$$\text{a) } P(\xi > 4) = P\left(Z > \frac{4-2}{1}\right) = P(Z > 2) \cong 0,023$$

b) Sea  $\eta$  la variable aleatoria “número de agentes de la muestra que inviertan más de cuatro horas en vender una póliza”. Entonces  $\eta$  se distribuye binomial  $B(n, p)$ , donde  $n = 400$  y  $p = 0,023$ . Al ser  $n$  suficientemente grande,  $\eta$  se distribuirá aproximadamente normal  $N(np, \sqrt{npq}) \cong N(9,1; 2,98)$ . Así pues,  $P(\eta > 3) = (\text{corrección por continuidad}) = P(\eta \geq 3,5) = P\left(Z \geq \frac{3,5-9,1}{2,98}\right) \cong P(Z \geq -1,878) \cong 0,9698$ .